

СОВРЕМЕННЫЕ  
ПРОБЛЕМЫ  
МЕХАНИКИ

---

*Л. М. Качанов*

•

НЕКОТОРЫЕ  
ВОПРОСЫ  
ТЕОРИИ  
ПОЛЗУЧЕСТИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1949

---

# **СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ**

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ  
*проф. А. И. МУРЬЕ*  
*и проф. Л. Г. ЛОЙЦЯНСКОГО*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ЛЕНИНГРАД 1949 МОСКВА

**Л. М. КАЧАНОВ**

**НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ  
ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ**

**ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

**ЛЕНИНГРАД 1949 МОСКВА**

12-5-4

Редактор *А. Н. Чекумарев*

Техн. редактор *К. М. Волчок*

---

Подписано к печати 15/XII 1949 г. Печ. л. 10,25. Уч. изд. л. 9,01. Тираж 4000 экз.  
35200 тип. зн. в печ. л. А-15317. Цена 5 р. 40 к., переплет 50 к. Заказ № 5478.

---

4-я типография им. Евг. Соколовой Главполиграфиздата при Совете Министров СССР,  
Ленинград, Измайловский пр., 29.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	7
<b>Глава I. Ползучесть</b>	
§ 1. Ползучесть . . . . .	9
§ 2. Уравнение ползучести при растяжении . . . . .	13
§ 3. Уравнения ползучести при сложном напряженном состоянии . . . . .	25
<b>Глава II. Вариационные принципы в теории ползучести</b>	
§ 4. Общий вариационный принцип . . . . .	37
§ 5. Начальное упругое состояние . . . . .	44
§ 6. Состояние установившейся ползучести . . . . .	45
§ 7. О приближении к состоянию установившейся ползучести . . . . .	51
§ 8. Теорема энергии . . . . .	52
<b>Глава III. Приближенное решение задач неустановившейся ползучести . . . . .</b>	
§ 9. Неустановившаяся ползучесть при заданных нагрузках . . . . .	56
§ 10. Приближенное решение релаксационных задач . . . . .	62
<b>Глава IV. Простейшие осесимметричные задачи</b>	
§ 11. Полый цилиндр под действием внутреннего давления . . . . .	65
§ 12. Сферический сосуд под действием внутреннего давления . . . . .	72
§ 13. О концентрации напряжений у отверстий . . . . .	76
§ 14. Релаксация напряжений в насаженном кольце . . . . .	78

## Глава V. Изгиб

§ 15. Чистый изгиб . . . . .	80
§ 16. Общий случай изгиба . . . . .	86
§ 17. Изгиб кривых стержней . . . . .	94
§ 18. Изгиб кривых тонкостенных труб . . . . .	95

## Глава VI. Кручение

§ 19. Начальное упругое состояние . . . . .	107
§ 20. Установившаяся ползучесть скручиваемого стержня . . . . .	111
§ 21. Неустановившаяся ползучесть скручиваемого стержня. Релаксация . . . . .	118
§ 22. Концентрация напряжений, вызванная мелким пазом на поверхности скручиваемого стержня . . . . .	121
§ 23. Кручение круглых стержней переменного диаметра . . . . .	131

## Глава VII. Изгиб пластин

§ 24. Основные положения . . . . .	146
§ 25. Вариационное уравнение скорости прогиба пластины . . . . .	149
§ 26. Осесимметричный изгиб круглой пластины . . . . .	152
§ 27. Минимальные свойства напряженного состояния пластины . . . . .	156
§ 28. Неравенство для скорости прогиба под сосредоточенной нагрузкой . . . . .	160
Цитированная литература . . . . .	163

---

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Явление медленной текучести твердых тел (в частности металлов), находящихся под нагрузкой, известно давно. Текучесть металлов быстро возрастает с увеличением температуры. С развитием котло- и турбостроения, распространением газовых турбин и многих других машин, работающих в условиях высокой температуры, явление текучести металлов приобрело очень большое значение и получило название ползучести металлов. Ползучесть определяет, по существу, прочность упомянутых важнейших машин и ограничивает возможность перехода к более экономичным и конструктивно выгодным высоким температурам. Проектирование подобных машин требует умения *рассчитывать* (опыты длительны и очень трудны) ползучесть тел более или менее сложной формы; это может быть выполнено лишь на основе теории движения ползущей среды.

Опубликовано много теоретических и экспериментальных работ, посвященных построению такой феноменологической теории (в дальнейшем мы будем называть ее теорией ползучести). В настоящей монографии излагаются некоторые вопросы теории ползучести металлов, разработанные преимущественно автором.

Глава I посвящена уравнениям ползучести при сложном напряженном состоянии; при этом ползучесть рассматривается как нелинейно-вязкое течение. Эта теория описывает основные черты длительного процесса ползучести при достаточно простом нагружении.

Точное решение задач теории ползучести крайне трудно, да и вряд ли необходимо, если учесть приближенный характер исходных уравнений. Поэтому в книге развиваются приближенные методы решения, основывающиеся на вариационных принципах, доказываемых в главе II.

В главе III с помощью общего вариационного принципа (§ 4) приводится приближенное решение задач неустановившейся ползучести, точное решение которых является очень трудной математической задачей даже в простейших случаях (например в случае чистого изгиба). Это приближенное решение основывается на знании предельных состояний тела — начального упругого и состояния установившейся ползучести. Начальное упругое состояние тела можно считать хорошо изученным; определение же состояния установившейся ползучести совпадает, по существу, с решением задач „обычной“ теории малых упруго-пластических деформаций, дополненной условием несжимаемости.

По этой общей схеме в последующих главах рассматриваются некоторые осесимметричные задачи (гл. IV), изгиб (гл. V) и кручение стержней (гл. VI), изгиб пластин (гл. VII).

Для нахождения концентрации напряжений (вызванной местными резкими изменениями очертаний тела), важной для оценки прочности в условиях ползучести, энергетические методы, конечно, мало пригодны; некоторые задачи о концентрации напряжений при кручении рассмотрены в гл. VI методом малого параметра.

Общие вопросы в книге изложены достаточно подробно, частные задачи — более сжато. От читателя требуется знакомство с основами теории упругости и теории пластичности.

В заключение приношу искреннюю благодарность А. Э. Данишевскому за ряд критических замечаний.

*Л. М. Качанов*

---

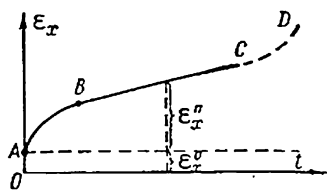


# ГЛАВА I

## ПОЛЗУЧЕСТЬ

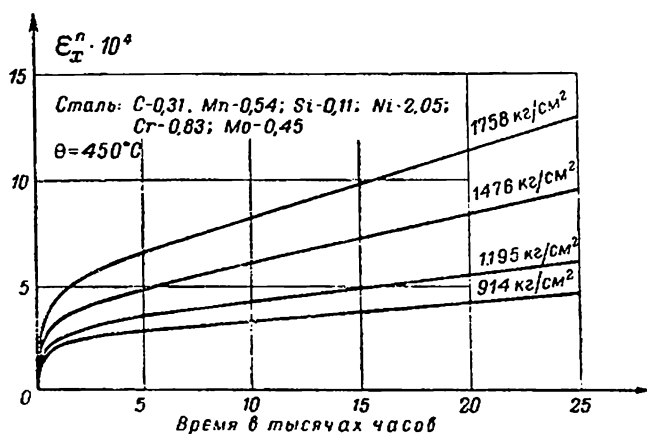
### § 1. Ползучесть

I. Ползучесть при постоянной нагрузке. Для изучения ползучести металлов обычно проводятся опыты по растяжению стержней при постоянной температуре и фиксированных нагрузках. Продолжительность опытов весьма различна — от нескольких часов до нескольких лет (в литературе [40] описаны уникальные опыты по ползучести стали, продолжавшиеся 100 000 часов с 27 марта 1931 г. до 8 октября 1942 г.). Типичные результаты длительных испытаний показаны на фиг. 1. Здесь по оси абсцисс отложено время  $t$ , а по оси ординат — относительное удлинение стержня  $\epsilon_x$ . При нагружении стержень получает начальную деформацию  $\epsilon_x^0$ , изображаемую отрезком  $OA$ , которая, в зависимости от величины нагрузки, может быть упругой или упруго-пластической. Затем следует участок  $AB$ , характеризующийся убыванием скорости ползучести и обычно называемый *первым периодом ползучести*; длительность его относительно невелика. По мере приближения к точке  $B$  убывание скорости деформации замедляется и, наконец, скорость деформации становится практически постоянной на участке  $BC$ , называемом *вторым периодом ползучести*. Этот период минимальной скорости ползучести, обычно весьма длительный, заканчивается либо „хрупким“ изломом в точке  $C$ ,



Фиг. 1.

либо „вязким“ разрушением вследствие образования шейки (участок  $CD$ ). Если напряжение велико (для данной температуры), то второй период может быть кратковременным или даже вовсе отсутствовать. В дальнейшем мы будем основываться на достаточно длительных испытаниях, содержащих хорошо выраженный участок постоянной скорости ползучести. Для выяснения зависимости ползучести от напряжения опыты



Фиг. 2.

проводятся при различных фиксированных нагрузках. На фиг. 2 показаны результаты опытов [28] над сталью при температуре  $450^\circ\text{C}$ , длившихся свыше трех с половиной лет<sup>1</sup>; по оси ординат отложена лишь деформация ползучести  $\epsilon_x^n$ , т. к. начальная деформация  $\epsilon_x^0$  здесь не представляет для нас интереса.

По опытам минимальная скорость деформации ползучести (обозначим ее через  $\dot{\epsilon}_x^n$ ) является монотонно возрастающей функцией напряжения  $\sigma_x$ . Различными исследователями предложено много аналитических зависимостей, основанных на обработке опытных данных. Мы остановимся на одной из таких

<sup>1</sup> Обычно продолжительность опытов значительно меньше.

зависимостей, наиболее распространенной и наиболее удобной для расчетов

$$\dot{\epsilon}_x'' = B_1(\infty) \dot{\epsilon}_x^m, \quad (1.01)$$

где  $B_1(\infty)$  и  $m$  — постоянные, характерные для данного материала при данной температуре. В справедливости соотношения (1.01) нетрудно убедиться, если нанести экспериментальные точки на логарифмическую сетку; они будут располагаться по прямой линии. По наклону этой прямой линии вычисляют значение  $m$ ; оно, как правило, больше единицы и доходит иногда до десяти. Приводим, в качестве примера, некоторые данные о  $m$  и  $B_1(\infty)$ .

Материал	Температура	$m$	$B_1(\infty)$
Сталь 0,33% С . . .	400° С	6.9	$1,8 \cdot 10^{-30} \left( \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \right)^{-m} \frac{1}{\text{час}}$
Сталь 12% Сг . . .	454° С	4.4	$5,0 \cdot 10^{-23} \left( \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \right)^{-m} \frac{1}{\text{час}}$

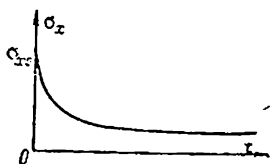
Заметим, что для области очень малых напряжений степенная зависимость (1.01) не оправдывается.

II. Влияние температуры. С увеличением температуры скорость ползучести возрастает. При переходе от одной температуры к другой, вообще говоря, меняются как  $m$ , так и  $B_1(\infty)$ . В ряде случаев показатель  $m$  претерпевает значительные изменения; иногда же этот показатель в известном интервале температур слабо меняется, и влияние температуры сказывается лишь на изменении коэффициента  $B_1(\infty)$ . Интересные данные о влиянии температуры можно найти в статье Одингга [15].

Для *соответственных температур* (соответственной температурой называется отношение абсолютной температуры, при которой производится опыт, к абсолютной температуре плавления данного металла) процессы ползучести различных металлов в качественном отношении сходны между собой. Это обстоятельство позволяет заменить изучение ползучести стали при высокой температуре изучением ползучести свинца при комнатной температуре.

III. Релаксация напряжений. Если в момент  $t=0$  сообщить стержню некоторую начальную деформацию  $\epsilon_{x0}$  и

затем поддерживать эту деформацию неизменной, то напряжение стержня  $\sigma_0$  с течением времени убывает; это явление релаксации напряжения объясняется развитием в стержне деформации ползучести. Кривая релаксации характеризуется резким спаданием напряжения в начальной стадии процесса (фиг. 3). Некоторые данные о релаксации напряжений будут рассмотрены ниже.

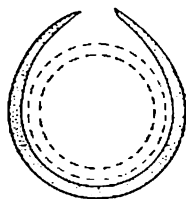


Фиг. 3.

IV. Меняющиеся нагрузки. Если резко менять нагрузки (быстрое уменьшение нагрузки, изменение ее направления, снятие нагрузки и т. п.), то течение процесса ползучести приобретает сложный характер и недостаточно изучено. Приведем некоторые качественные результаты.

При уменьшении напряжения с  $\sigma_1$  до  $\sigma_2$  ползучесть становится более низкой, чем при напряжении  $\sigma_2$ , постоянном с самого начала опыта. При снятии нагрузки наблюдается явление, сходное с явлением упругого послепействия. Именно, деформация ползучести с течением времени несколько убывает („обратная“ ползучесть).

V. „Вязкие“ и „хрупкие“ разрушения при ползучести. Разрушения при ползучести имеют различный характер в зависимости от свойств материала при данной температуре. Разрушение углеродистой стали (при температуре ниже  $550^\circ\text{C}$ ), меди, свинца, некоторых сплавов и т. п. носит вязкий характер, сопровождаясь большими удлинениями и образованием шейки. В качестве примера „вязкого“ разрушения на фиг. 4 показано разрушение котельной трубы под действием внутреннего давления [12]; пунктиром нанесены первоначальные размеры трубы.



Фиг. 4.

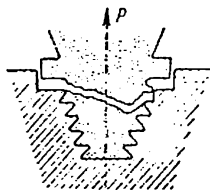
Машины, работающие в условиях высокой температуры, большей частью изготавливаются из специальных теплоустойчивых сталей, отличающихся малой ползучестью; разрушение таких сталей обычно наступает при малых деформациях и носит хрупкий характер; оно начинается, как правило, в местах концентрации напряжений.

На фиг. 5 показано „хрупкое“ разрушение хвостового крепления турбинной лопатки при температуре  $700^{\circ}\text{C}$  [42].

VI. Задачи теории ползучести. В связи с изложенным, перед теорией ползучести стоит задача определения деформаций тела и внутренних усилий в нем при заданных внешних нагрузках и смещениях (на поверхности тела).

Если материал тела характеризуется вязким разрушением при данной температуре, то величина внешних нагрузок лимитируется допустимыми деформациями тела; при этом обычно можно не обращать внимания на повышенные значения напряжений в отдельных местах тела.

Если же материал подвержен „хрупкому“ разрушению, то, помимо деформаций тела, необходимо рассмотреть концентрацию напряжений, вызванную резкими локальными изменениями очертаний тела.



Фиг. 5.

Последнее обстоятельство подчеркнуто, так как иногда высказывается ошибочное мнение о том, что при ползучести напряжения сглаживаются и на концентрацию напряжений можно не обращать внимания (подобно тому как при статической нагрузке упруго-пластического тела при нормальной температуре не следует бояться перехода за предел упругости).

## § 2. Уравнение ползучести при растяжении

I. Основное уравнение. Процесс ползучести есть процесс неравновесной пластической деформации. При фиксированных внешних воздействиях на тело (постоянные нагрузки, постоянные заданные смещения) последнее испытывает ползучесть в той или иной форме. Вследствие этого, соотношения, связывающие компоненты деформации и компоненты напряжения, характерные для равновесных процессов деформации (см. [1]), вообще говоря, непригодны для описания ползучести. Процесс ползучести во втором периоде (участок  $BC$ , фиг. 1) естественно рассматривать как процесс нелинейно вязкого течения. Первым периодом ползучести в ряде случаев нельзя пренебрегать (например, в задачах релаксации и неустановившейся ползучести). Далее, кривые

ползучести в первом приближении можно считать геометрически подобными<sup>1</sup> (фиг. 2). Эти соображения приводят к следующему обобщению зависимости (1.01):

$$\dot{\epsilon}_x^n = B_1(t) \sigma_x^m, \quad (2.01)$$

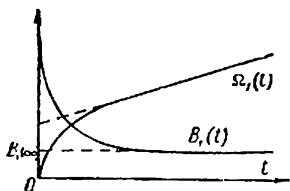
где  $B_1(t)$  — положительная убывающая функция времени (фиг. 6), отсчитываемого от момента начала ползучести, асимптотически стремящаяся к предельному значению  $B_1(\infty)$ .

В рассматриваемых опытах напряжение фиксировано; интегрируя (2.01) по времени от 0 до  $t$ , получим:

$$\epsilon_x^n = \Omega_1(t) \sigma_x^m, \quad (2.02)$$

где

$$\Omega_1(t) = \int_0^t B_1(t) dt \quad (2.03)$$



Фиг. 6.

есть положительная монотонно возрастающая функция (фиг. 6).

При больших  $t$   $\Omega_1(t)$  является линейной функцией времени. Очевидно, что за  $\Omega_1(t)$  можно взять одну из кривых ползучести (см. фиг. 2), умножив ее ординаты на  $\sigma_x^{-m}$ , где  $\sigma_x$  — напряжение, отвечающее выбранной кривой. Вернемся к уравнению (2.01). Примем, что скорость деформации ползучести при медленных и достаточно плавных изменениях напряжения описывается тем же уравнением (2.01). Пусть, далее, напряжения не превышают предела упругости при данной температуре. Тогда полная скорость деформации  $\dot{\epsilon}_x$  будет складываться из скорости деформации ползучести  $\dot{\epsilon}_x^n$  и скорости упругой деформации  $\dot{\epsilon}_x^y$ , т. е.

$$\dot{\epsilon}_x = \dot{\epsilon}_x^n + \dot{\epsilon}_x^y, \quad (2.04)$$

но

$$\dot{\epsilon}_x^y = \frac{1}{E} \frac{d\sigma_x}{dt},$$

<sup>1</sup> Заметим, что условие подобия не является существенным для теории.

где  $E$  — модуль упругости; следовательно:

$$\dot{\varepsilon}_x = B_1(t) \sigma_x^m + \frac{1}{E} \frac{d\sigma_x}{dt}. \quad (2.05)$$

Это соотношение обобщает известное уравнение Максвелла

$$\dot{\varepsilon}_x = \beta \sigma_x + \frac{1}{E} \frac{d\sigma_x}{dt}, \quad (\beta = \text{const}), \quad (2.06)$$

которое получается из (2.05) при  $B_1(t) = \text{const}$  и  $m = 1$ . Свойства рассматриваемой среды можно представить простой механической моделью, состоящей из последовательно соединенных упругого элемента 1 и элемента вязкого трения 2 (фиг. 7). Жидкость в элементе 2 с течением времени густеет соответственно множителю  $B_1(t)$  в (2.05), и вязкость ее возрастает, стремясь к некоторому предельному значению.

Функция  $B_1(t)$  и постоянная  $m$  легко определяются из простейших опытов; однако, как мы увидим ниже, в вычислении  $B_1(t)$  нет необходимости; достаточно знать зависимость  $\Omega_1(t)$ , которую можно непосредственно снимать с кривых ползучести. Так как  $B_1(t) dt = d\Omega_1$ , то уравнение (2.05) приводится к виду, не содержащему времени  $t$  явным образом

$$\frac{d\varepsilon_x}{d\Omega_1} = \sigma_x^m + \frac{1}{E} \frac{d\sigma_x}{d\Omega_1}. \quad (2.07)$$



Фиг. 7.

Как подчеркивалось ранее, уравнение (2.05) справедливо при некоторых ограничениях: при не слишком малых скоростях ползучести и при напряжениях, изменяющихся медленно и монотонно; кроме того, начало процесса ползучести должно протекать при достаточно больших напряжениях<sup>1</sup>. Эти условия в практических задачах обычно выполняются; локальное нарушение этих условий (например, вблизи нейтральной плоскости в задаче изгиба) несущественно. При указанных ограничениях инвариантность уравнения (2.05) относительно изменения начала отсчета времени, подчеркнутая Ю. Н. Работновым [17], существенного значения не имеет.

<sup>1</sup> Естественно, что уравнение пластической деформации справедливо при более значительных ограничениях, нежели закон Гука.

II. Задача о релаксации напряжений. В момент  $t=0$  стержень получил начальное удлинение  $\varepsilon_{x0}$ , которому по закону Гука отвечает напряжение

$$\sigma_{x0} = E\varepsilon_{x0}. \quad (2.08)$$

В дальнейшем при  $t > 0$  длина стержня остается неизменной, т. е.  $\varepsilon_x = \varepsilon_x^u + \varepsilon_x^v = \varepsilon_{x0} = \text{const}$ ; следовательно  $\dot{\varepsilon}_x = \frac{d\varepsilon_x}{dt} = 0$  и согласно (2.05):

$$B_1(t) \sigma_x^m + \frac{1}{E} \frac{d\sigma_x}{dt} = 0.$$

Разделяя переменные, интегрируем это уравнение при начальном условии (2.08):

$$\int_{\sigma_{x0}}^{\sigma_x} \frac{d\sigma}{\sigma^m} = -E\Omega_1(t).$$

После простых вычислений получаем:

$$t^* = \frac{1}{m-1} (\rho^{1-m} - 1), \quad (2.09)$$

где введены безразмерные величины

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_{x0}} = \rho; \quad E\Omega_1(t) \sigma_{x0}^{m-1} = t^*. \quad (2.10)$$

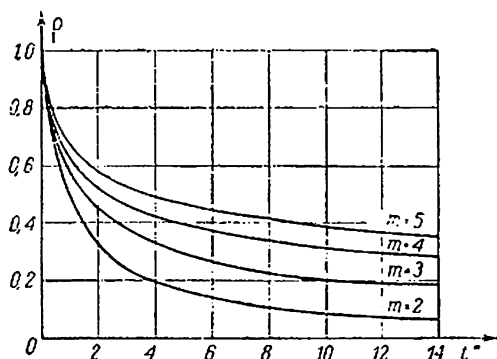
Так как  $m > 1$ , а  $t^*$  с течением времени неограниченно возрастает, то напряжение в стержне падает, стремясь со временем к нулю. Кривые релаксации по уравнению (2.09) нанесены на фиг. 8 для некоторых значений  $m$ . В начале процесса напряжение быстро падает; релаксация напряжений в материалах, характеризующихся большей скоростью ползучести, протекает более интенсивно.

Если известны кривые ползучести (см. фиг. 2) и число  $m$ , то построение кривой релаксации трудностей не вызывает. Задаемся каким-нибудь значением  $\rho$  и по (2.09) вычисляем  $t^*$  (или пользуемся для этого графиком, аналогичным графику на фиг. 8). Берем одну из кривых ползучести  $\sigma_x = \text{const} = \sigma_{x1}$  (желательно в области напряжений, близких к  $\sigma_{x0}$ ) и полагаем  $\Omega_1(t) = \varepsilon_x / \sigma_{x1}^m$ . По выбранной кривой находим такое время, для которого

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_{x0}}{E} \left( \frac{\sigma_{x1}}{\sigma_{x0}} \right)^m t^*.$$



III. Сопоставление с опытами по релаксации. Для оценки правильности полученного решения следует обратиться к опытным данным. К сожалению, имеется очень мало рационально поставленных опытов по релаксации, позволяющих провести сопоставление данных по релаксации с результатами опытов при постоянных напряжениях. Кроме того, трудности точного замера весьма малых деформаций в течение длительного промежутка времени и неизбежные деформа-



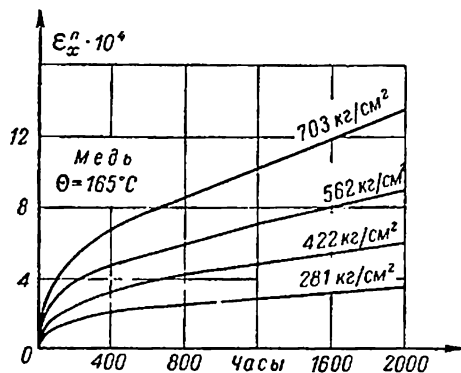
Фиг. 8.

ции самих испытательных релаксационных машин вызывают у некоторых исследователей сомнения в точности получаемых данных.

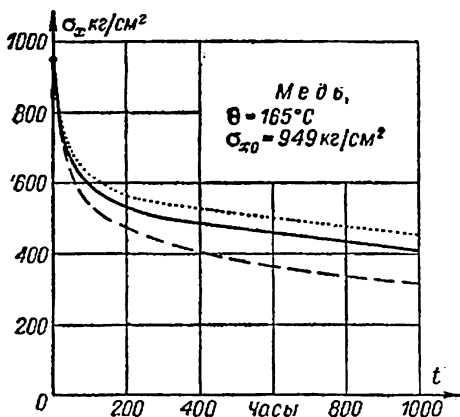
Воспользуемся результатами опытов Девиса [80] по ползучести и релаксации красной меди при температуре 165°С. На фиг. 9 показаны кривые ползучести, на фиг. 10 — кривая релаксации (сплошная линия). Модуль упругости меди  $E = 0,99 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ , начальное напряжение  $\sigma_{x0} = 949 \text{ кг/см}^2$ ; по вычислениям Попова [89]  $m = 1,6$ . Теоретическая кривая релаксации по уравнению (2.09) (пунктир на фиг. 10) лежит несколько ниже экспериментальной.

К аналогичному заключению пришел Дейвенпорт [89] на основании кратковременных (8 часов) опытов по ползучести и релаксации скручиваемых тонкостенных медных труб при температурах 150—200°С.

Трамплер [44] по экспериментальным кривым релаксации (при разных начальных напряжениях) для специальной стали



Фиг. 9.

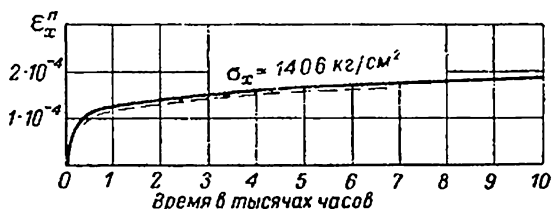


Фиг. 10.

при температуре  $538^\circ\text{C}$  построил кривую ползучести при фиксированном напряжении. Построение было выполнено графически на основе положения: „скорости деформации пол-

зучести в равные моменты времени при равных напряжениях одинаковы<sup>2</sup>. Это положение согласуется с принятым нами законом ползучести (2.01).

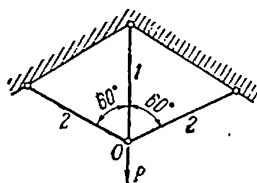
Трамплер получил хорошее совпадение вычисленной кривой ползучести (сплошная линия на фиг. 11) с экспериментальной (пунктир).



Фиг. 11.

IV. Пример. Ползучесть стержневой решетки. В качестве простого примера, иллюстрирующего протекание процесса ползучести, рассмотрим ползучесть решетки, изображенной на фиг. 12 и состоящей из трех одинаковых стержней длины  $l$  и площади поперечного сечения  $F$ . На узел  $O$  действует постоянная сила  $P$ . Напряжение в стержне 1 обозначим через  $\sigma_1$ , в стержнях 2 — через  $\sigma_2$ ; точно так же будем отличать относительные удлинения и скорости относительных удлинений стержней 1 и 2 ( $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ ;  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ). Условие равновесия будет:

$$P = F(\sigma_1 + \sigma_2). \quad (2.11)$$



Фиг. 12.

Условие неразрывности деформаций имеет вид:

$$\epsilon_1 = 2\epsilon_2 \quad \text{или} \quad \xi_1 = 2\xi_2. \quad (2.12)$$

Но согласно закону ползучести

$$\xi_i = B_1(t) \sigma_i^m + \frac{1}{E} \frac{d\sigma_i}{dt} \quad (i=1,2). \quad (2.13)$$

Внося (2.13) в (2.12) и исключая  $\sigma_2$  с помощью (2.11), получаем дифференциальное уравнение

$$B_1(t) \sigma_1^m + \frac{1}{E} \frac{d\sigma_1}{dt} = 2B_1(t) \left( \frac{P}{F} - \sigma_1 \right)^m - \frac{2}{E} \frac{d\sigma_1}{dt}. \quad (2.14)$$

В момент  $t=0$  решетка находится в упругом состоянии, определяемом законом Гука; условимся соответствующие напряжения и деформации отличать одним штрихом ( $\sigma_1', \varepsilon_1', \dots$ ). Легко видеть, что

$$\sigma_1' = \frac{2}{3} \frac{P}{F}; \quad \sigma_2' = \frac{1}{3} \frac{P}{F}. \quad (2.15)$$

Отбросим теперь в соотношении ползучести скорость упругой деформации  $\frac{1}{E} \frac{d\sigma_1}{dt}$ , заменим функцию  $B_1(t)$  ее предельным значением  $B_1(\infty)$  и при законе  $\xi_i = B_1(\infty) \sigma_i^m$  определим напряжения и скорости деформации (условимся отличать их двумя штрихами). Вместо (2.14) имеем:

$$\sigma_1^{m''} = 2 \left( \frac{P}{F} - \sigma_1'' \right)^m. \quad (2.16)$$

Далее находим ( $\mu = 1/m$ ):

$$\sigma_1'' = \frac{2^\mu}{1+2^\mu} \frac{P}{F}; \quad \sigma_2'' = \frac{1}{1+2^\mu} \frac{P}{F}. \quad (2.17)$$

Это состояние назовем состоянием установившейся ползучести. Вернемся теперь к уравнению (2.14) и рассмотрим общий случай. Разделяя переменные и интегрируя от момента  $t=0$ , получаем:

$$\int_{\sigma_1'}^{\sigma_1} \frac{d\zeta}{P_*(\zeta)} = \frac{1}{3} E \Omega_1(t), \quad (2.18)$$

где положено

$$P_*(\zeta) = 2 \left( \frac{P}{F} - \zeta \right)^m - \dot{\zeta}^m. \quad (2.19)$$

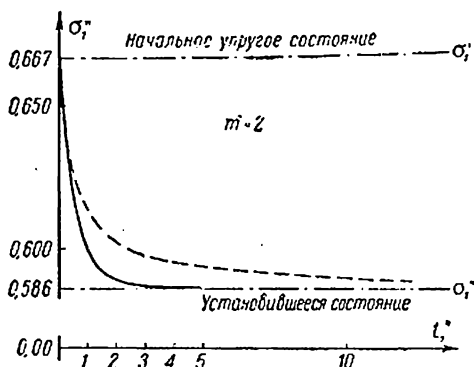
В силу уравнения (2.16):

$$P_*(\sigma_1'') = 0. \quad (2.20)$$

Далее

$$\frac{dP_*(\zeta)}{d\zeta} = -m \left[ 2 \left( \frac{P}{F} - \zeta \right)^{m-1} + \zeta^{m-1} \right] < 0. \quad (2.21)$$

Заметим, что  $\sigma_1'' < \sigma_1'$  и в интервале  $\sigma_1'' < \zeta \leq \sigma_1'$  функция  $P_*(\zeta)$  отрицательна. В точке  $\zeta = \sigma_1''$  функция  $P_*(\zeta)$  имеет нуль первого порядка и, следовательно, интеграл в (2.18)



Фиг. 13.

при  $\zeta = \sigma_1''$  расходится. Так как  $\Omega_1(t)$  — возрастающая функция времени (фиг. 6), то уравнение (2.18) определяет  $\sigma_1$  как положительную монотонно убывающую функцию, асимптотически приближающуюся к предельному значению  $\sigma_1''$ . В частном случае  $m=2$  нетрудно найти, что

$$t_1^* = \frac{3}{4\sqrt{2}} \left( \ln \left| \frac{2 + \sqrt{2} - \sigma_1^*}{-2 + \sqrt{2} + \sigma_1^*} \right| - \ln \frac{3\sqrt{2} + 4}{3\sqrt{2} - 4} \right), \quad (2.22)$$

где введены безразмерные величины

$$\frac{\sigma_1 F}{P} = \sigma_1^*; \quad \frac{E\Omega_1(t)P}{2F} = t_1^*. \quad (2.23)$$

Кривая, соответствующая этому уравнению, показана на фиг. 13 сплошной линией.

Итак, при фиксированной внешней нагрузке напряженное состояние решетки монотонно изменяется от начального упругого (при  $t=0$ ) к установившемуся состоянию (при  $t=\infty$ ). Ниже мы увидим, что в телах сложной формы, при фиксированных нагрузках, картина ползучести имеет такой же характер.

V. Другие теории ползучести. В этом разделе мы кратко рассмотрим другие теории ползучести.

1. *Теория старения*<sup>1</sup> основывается на зависимости, устанавливаемой между деформацией, напряжением и временем. Принимают, что деформация ползучести описывается соотношением

$$\epsilon_x^u = \Omega_1(t) \sigma_x^m.$$

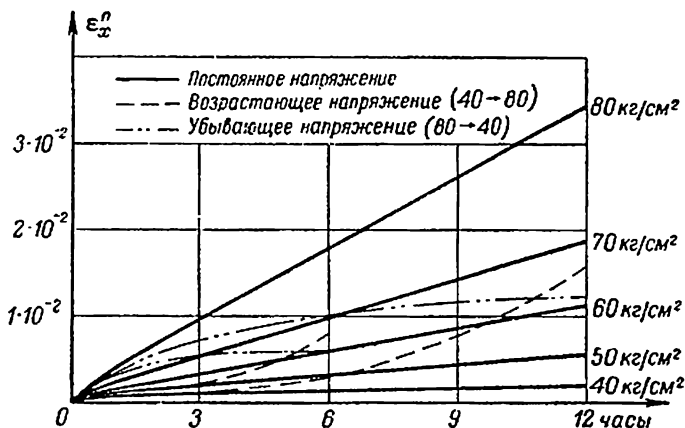
Присоединяя сюда упругую деформацию, получаем:

$$\epsilon_x = \Omega_1(t) \sigma_x^m + \frac{\sigma_x}{E}. \quad (2.24)$$

Функция  $\Omega_1(t)$  и постоянная  $m$  определяются так же, как и раньше, и имеют прежний смысл. Соотношению (2.24), очевидно при постоянном напряжении, часто придают более общий характер и полагают, что оно справедливо и при медленно и монотонно изменяющихся напряжениях. Это, вообще говоря, неверно; можно указать случаи, когда соотношение (2.24) приводит к нелепости (пусть, например, нагрузка уменьшается, стремясь с течением времени к нулю, тогда в конце процесса мы будем иметь по (2.24)  $\epsilon_x = 0$ , что абсурдно). Для выяснения вопроса о применимости теории старения при напряжениях, медленно и монотонно изменяющихся в некотором интервале, были проведены следующие опыты [8]. Свинцовые стержни при комнатной температуре растягивались под действием изменяющейся нагрузки; опыты продолжались 3, 6, 9 и 12 часов, причем напряжения возрастали (или убывали) пропорционально времени от 40 до 80 кг/см<sup>2</sup> (от 80 до 40 кг/см<sup>2</sup>). Изменения нагрузки осуществлялись втеканием (вытеканием) воды. Параллельно были

<sup>1</sup> Установившейся терминологии нет; под теорией старения мы будем понимать излагаемую ниже теорию, не связывая ее с явлением старения в физике металлов. Теорию, развитую в предыдущих параграфах, мы условимся называть теорией течения.

проведены обычные испытания при постоянных напряжениях длительностью в 12 часов. Результаты опытов показаны на фиг. 14 (для ясности чертежа из последнего исключены кривые трех- и девятичасовых испытаний). Вследствие разброса точек, количественные зависимости установить не удалось,



Фиг. 14.

однако качественные выводы несомненны; они свидетельствуют о резком противоречии опытных данных и предсказаний теории старения и в то же время подтверждают теорию течения, т. к. скорости деформации при переменных напряжениях согласуются с уравнением (2.05).

Заметим, что все же в случаях релаксации и постоянной внешней нагрузки теория старения приводит к правильным качественным результатам (см. ниже § 9 и § 10); далее, решение задач по теории старения связано с меньшими математическими трудностями. Этим, повидимому, объясняется распространение теории старения.

Релаксация по теории старения рассматривается очень просто; согласно (2.24), имеем:

$$\Omega_1(t) \sigma_x^m + \frac{\sigma_x}{E} = \frac{\sigma_{x0}}{E}$$

или в прежних безразмерных величинах (2.10):

$$t^* = \frac{1 - p}{p^m}, \quad (2.25)$$

откуда вытекает, что  $p$  стремится со временем к нулю. Кривые релаксации по теории течения располагаются ниже кривых (2.25) и характеризуются более резким спаданием напряжения. Если мы построим кривую релаксации по теории старения для данных Девиса (построение выполняется так же, как и в разделе III настоящего параграфа, но  $t^*$  вычисляется по формуле (2.25)), то придем к кривой, нанесенной на фиг. 10 точками и близкой к опытной кривой релаксации. Основываясь на этом, иногда судят о правильности теории старения.

По нашему мнению указанное совпадение не устраняет недостатков теории старения, которой следует дать отрицательную оценку.

Обратимся к другому примеру — решетке (фиг. 12). Согласно уравнениям (2.11), (2.12) и (2.24), находим при  $m = 2$ :

$$t_1^* = \frac{1}{2} \frac{3z_1^* - 2}{(\sigma_1^* - 2)^2 - 2}.$$

Эта зависимость нанесена на фиг. 13 пунктиром; легко видеть, что теория старения значительно удлиняет период неустановившейся ползучести.

Состояние установившейся ползучести одинаково описывается теориями течения и старения, и, по существу, сводится к соответствующей задаче теории малых упруго-пластических деформаций.

В заключение заметим, что Н. М. Беляев [1] развил теорию старения в несколько иной форме.

2. *Теория упрочнения*, предложенная Надаи и Дейвенпортом [29], исходит из функциональной зависимости между напряжением, деформацией и скоростью деформации ползучести  $f(\epsilon_x^n, \dot{\epsilon}_x^n; \sigma_x) = 0$ .

Эта теория почти не разработана и, повидимому, мало перспективна, так как связана с огромными математическими трудностями при неизбежном искажении опытных данных. За подробностями отсылаем к упомянутым работам, а также к статьям Работнова [17, 18] и Чурикова [26].



3. *Наследственная теория.* Ю. Н. Работнов предложил [17] использовать для описания ползучести теорию наследственной упругости Больцмана — Вольтерра. Эта весьма общая и гибкая теория при сложном напряженном состоянии приводит к большим математическим трудностям, которые Ю. Н. Работнову удалось частично преодолеть (см. [18, 17]).

4. *Замечание о физических теориях ползучести.* Большое количество работ посвящено теоретическому определению зависимости между минимальной скоростью ползучести, напряжением и температурой. В основе этих работ лежат некоторые физические представления о механизме пластичности. Обычно исходят из представлений об атермической (сдвиговой) и термической (диффузионной) формах пластической деформации. Эта схема не объясняет всех явлений, наблюдаемых при ползучести сложных металлических сплавов, употребляемых в технике.

### § 3. Уравнения ползучести при сложном напряженном состоянии

1. Уравнение установившейся ползучести. Напряженное состояние в некоторой точке тела характеризуется компонентами напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z; \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ , совокупность которых образует тензор напряжения. Главные напряжения обозначим через  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  (условимся при этом, что  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ).

Деформация в некоторой точке тела характеризуется компонентами деформации  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z; \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ ; через  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  обозначим главные удлинения. Компоненты деформации связаны с проекциями вектора смещения  $u_x, u_y, u_z$  известными соотношениями:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \dots, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}. \quad (3.01)$$

Скорость деформации в некоторой точке тела характеризуется шестью компонентами  $\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\epsilon}_z; \dot{\gamma}_{xy}, \dot{\gamma}_{yz}, \dot{\gamma}_{zx}$ .

Обозначим через  $v_x, v_y, v_z$  проекции вектора скорости в рассматриваемой точке; тогда величины

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \dot{\epsilon}_y = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \dot{\epsilon}_z = \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (3.02)$$

представляют собой скорости относительных удлинений соответственно в направлениях  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , а величины

$$\eta_{xy} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}, \quad \eta_{yz} = \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}, \quad \eta_{zx} = \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \quad (3.03)$$

суть скорости сжатывания первоначально прямых углов. Через  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\xi_3$  мы будем обозначать главные скорости деформации. Величины  $\xi_x$ ,  $\xi_y$ , ...,  $\eta_{zx}$  используются в гидромеханике, где можно найти их подробный вывод<sup>1</sup>. В теории ползучести мы рассматриваем лишь случай малой деформации; тогда проекции скорости  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  будут равны частным производным по времени от проекций смещения:

$$v_x = \frac{\partial u_x}{\partial t}, \quad v_y = \frac{\partial u_y}{\partial t}, \quad v_z = \frac{\partial u_z}{\partial t}. \quad (3.04)$$

Следовательно:

$$\xi_x = \frac{\partial \epsilon_x}{\partial t}, \quad \xi_y = \frac{\partial \epsilon_y}{\partial t}, \quad \dots, \quad \eta_{zx} = \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial t}. \quad (3.05)$$

Заметим, что направления главных скоростей деформации, вообще говоря, не совпадают с главными направлениями деформации.

Тела различным образом сопротивляются нормальным и касательным напряжениям, поэтому важное значение приобретают величины, которыми можно охарактеризовать нормальные и касательные напряжения в данной точке и которые не зависят от выбора координатной системы. Такими величинами, как известно, являются среднее давление

$$\sigma = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

и интенсивность касательных напряжений

$$T = + \frac{1}{\sqrt{6}} \times \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \quad (3.06)$$

Подобными же величинами, характеризующими объемные деформации и деформации сдвига, являются относительное

<sup>1</sup> См. также [7], § 4.

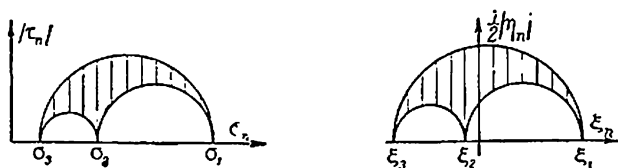
изменение объема  $\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$  и интенсивность деформаций сдвига

$$\Gamma = + \sqrt{\frac{2}{3}} \times \\ \times \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}. \quad (3.07)$$

Аналогичное значение имеют скорость относительного изменения объема  $\xi = \xi_x + \xi_y + \xi_z$  и интенсивность скоростей деформаций сдвига

$$H = + \sqrt{\frac{2}{3}} \times \\ \times \sqrt{(\xi_x - \xi_y)^2 + (\xi_y - \xi_z)^2 + (\xi_z - \xi_x)^2 + \frac{3}{2}(\dot{\gamma}_{xy}^2 + \dot{\gamma}_{yz}^2 + \dot{\gamma}_{zx}^2)}. \quad (3.08)$$

Нормальное и касательное напряжения ( $\sigma_n$  и  $\tau_n$ ) на некоторой площадке с нормалью  $n$  удобно изображать с помощью



Фиг. 15.

кругов Мора (фиг. 15). Точно так же можно представить деформированное состояние в данной точке и картину скоростей деформации. В правой части (фиг. 15) построена диаграмма Мора для скорости деформации; по оси абсцисс отложена скорость относительного удлинения в направлении нормали к данной площадке. Пусть эта нормаль наклонена под углом  $\alpha$  к плоскости, проходящей через главные оси  $I$ ,  $3$  скорости деформации; половина скорости сдвига  $\eta_n$  в плоскости измерения угла  $\alpha$  откладывается по оси ординат. Смещение кругов влево соответствует условию несжимаемости  $\xi_x + \xi_y + \xi_z = 0$ .

Перейдем теперь к основным положениям, вытекающим из рассмотрения экспериментальных данных; последние отно-

сятся ко второму периоду ползучести, характеризуемому постоянством скоростей ползучести. В этом смысле мы будем здесь говорить об установившейся ползучести. Опыты показывают, что процесс установившейся ползучести при сложном напряженном состоянии определяется касательными напряжениями и протекает в общем по законам „обычного“ пластического деформирования.

1. Изменение объема тела является упругой деформацией, следовательно:

$$\xi^n = \xi_x^n + \xi_y^n + \xi_z^n = 0, \quad (3.09)$$

где индексом „n“ мы отличаем, как и ранее, компоненты скорости деформации ползучести.

2. Главные направления тензора напряжений и тензора скоростей деформации ползучести совпадают.

3. Диаграммы Мора для напряжения и скорости деформации ползучести подобны.

4. Интенсивность скоростей деформаций сдвига ползучести  $H^n$  является функцией интенсивности касательных напряжений  $T$ , характерной для данного материала при данной температуре.

Из подобия кругов Мора следует, что (индекс „n“ опускаем):

$$\frac{\xi_1 - \xi_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\xi_2 - \xi_1}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{\xi_3 - \xi_1}{\sigma_3 - \sigma_1} = f,$$

где  $f$  — некоторая, пока неопределенная, функция инвариантов напряжения и скорости деформации. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 &= (\sigma_1 - \sigma_2) f; & \xi_2 - \xi_3 &= (\sigma_2 - \sigma_3) f; \\ \xi_3 - \xi_1 &= (\sigma_3 - \sigma_1) f. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Разности  $\xi_1 - \xi_2$ ,  $\xi_2 - \xi_3$ ,  $\xi_3 - \xi_1$  суть главные скорости сдвига, а разности  $\sigma_1 - \sigma_2$ ,  $\sigma_2 - \sigma_3$ ,  $\sigma_3 - \sigma_1$  суть удвоенные главные касательные напряжения. Возводя равенства (3.10) в квадрат и складывая, находим:

$$H^n = 2fT. \quad (3.11)$$

В силу четвертого положения отсюда вытекает, что  $f$  — функция  $T$ ; соотношение (3.11) удобно теперь записывать в форме:

$$H^n = 2f(T^2) T. \quad (3.12)$$

Зависимости (3.10) нетрудно привести с помощью (3.09) к виду:

$$\xi_i^n = f(T^2) (\sigma_i - \sigma) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.13)$$

Пользуясь обычными формулами перехода, связывающими компоненты напряжения в ортогональной системе координат  $x, y, z$  с компонентами напряжения в системе главных осей, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \xi_x^n &= f(T^2) (\sigma_x - \sigma) \\ &\text{и т. п.} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \gamma_{xy}^n &= 2f(T^2) \tau_{xy} \\ &\text{и т. п.} \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

При одноосном растяжении мы исходили из степенной зависимости (1.01); в общем случае имеем<sup>1</sup>:

$$H^n = 2B(\infty) T^m \text{ или } f(T^2) = B(\infty) T^{m-1}, \quad (3.15)$$

где  $B(\infty)$  — некоторая постоянная, а показатель  $m$  имеет прежнее значение. При одноосном растяжении  $\sigma_1 \neq 0$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ;  $\xi_1 \neq 0$ ;  $\xi_2 = \xi_3 = -\frac{1}{2}\xi_1$  и из (3.15) находим:

$$\xi_1^n = 2B(\infty) 3^{-\frac{m+1}{2}} \sigma_1^m.$$

Сопоставляя эту формулу с формулой (1.01), получаем:

$$2B(\infty) = 3^{\frac{m+1}{2}} B_1(\infty). \quad (3.16)$$

II. Замечание об экспериментальных данных. Проведенные опыты относятся преимущественно к изучению ползучести тонкостенных труб, находящихся под действием внутреннего давления  $p$ , осевой силы  $P$  и скручивающего момента  $M$ ; эти нагрузки обычно комбинируются

<sup>1</sup> Иначе мы будем пользоваться обозначением

$$f(T^2, \infty) = f(T^2) = B(\infty) f_1(T^2).$$

попарно (растяжение и кручение, растяжение и внутреннее давление и т. п.). Для тонкостенной трубы можно считать, что напряжения в ее стенке распределяются равномерно, вследствие чего они легко вычисляются, если известны нагрузки; соответствующие деформации (осевое удлинение  $\epsilon_z$ , относительное увеличение диаметра, равное  $\epsilon_\varphi$ , и сдвиг  $\gamma_{\varphi z}$ ) замеряются. Варьируя нагрузки, можно создать произвольное плоское напряженное состояние. Сопоставление таких опытов с обычными испытаниями при простом растяжении позволяет судить о правильности уравнений ползучести. Другие опыты посвящены изгибу и кручению в условиях ползучести. Опытные данные в общем подтверждают уравнения ползучести (3.14), хотя отдельные экспериментальные точки иногда значительно отклоняются от теоретических предсказаний. Необходимо дальнейшее накопление и уточнение опытных данных по ползучести при сложном напряженном состоянии; в этом направлении еще многое надо сделать.

В тонкостенной трубе, находящейся под действием внутреннего давления  $p$  и осевой силы  $P$ , напряжения таковы:

$$\sigma_r \approx 0; \quad \sigma_\varphi = \frac{pa}{b-a}; \quad \sigma_z = \frac{P}{\pi(b^2-a^2)}, \quad (3.17)$$

где  $2a$ ,  $2b$  — соответственно внутренний и наружный диаметры трубы. По формулам (3.14) находим скорости деформации

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_r &= -\frac{1}{3} B(\infty) T^{m-1} \left(1 + \frac{\alpha}{\beta+1}\right) \frac{p}{\beta-1}, \\ \dot{\epsilon}_\varphi &= \frac{1}{3} B(\infty) T^{m-1} \left(2 - \frac{\alpha}{\beta+1}\right) \frac{p}{\beta-1}, \\ \dot{\epsilon}_z &= \frac{1}{3} B(\infty) T^{m-1} \left(\frac{2\alpha}{\beta+1} - 1\right) \frac{p}{\beta-1}, \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

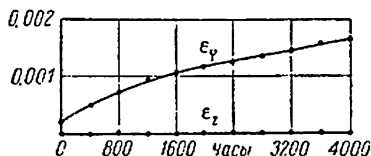
где введены обозначения:

$$\beta = \frac{b}{a}; \quad \alpha = \frac{P}{\pi p a^2}.$$

При этом

$$T^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{p}{\beta-1}\right)^2 \left[1 - \frac{\alpha}{\beta+1} + \left(\frac{\alpha}{\beta+1}\right)^2\right]$$

Так как  $\beta + 1 \approx 2$ , то при  $\alpha = 1$  скорость ползучести в осевом направлении равна нулю; этот случай отвечает трубе с доншиками, испытывающей внутреннее давление, и легко осуществим на опыте. Вывод об отсутствии осевой ползучести хорошо подтверждается экспериментально. На фиг. 16 показаны результаты опытов Нортонa [36] по ползучести стальных (углеродисто-молибденовых) труб ( $2a=80,1$  мм,  $2b=101,6$  мм) при давлении  $p=113,7$  атм и температуре  $566^\circ\text{C}$ .



Фиг. 16.

Мы ограничиваемся этим замечанием, отсылая читателя к работам [2, 11, 27, 34, 36], в которых можно найти

подробности об экспериментах и литературные указания.

III. Общие уравнения ползучести. Приведенные выше уравнения относились к установившейся ползучести. Распространим эти уравнения на общий случай так же, как мы это делали при простом растяжении (§ 2). Постоянную  $B(\infty)$  заменим функцией времени  $B(t)$ , причем

$$2B(t) = 3^{\frac{m+1}{2}} B_1(t). \quad (3.19)$$

Далее, учтем упругие деформации  $\epsilon_x^y, \epsilon_y^y, \dots, \gamma_{xz}^y$ , связанные с напряжениями законом Гука

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x^y &= \frac{1}{2G} \left( \sigma_x - \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma \right) \\ &\text{и т. п.} \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \gamma_{xy}^y &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ &\text{и т. п.} \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

где  $G$  — модуль сдвига,  $\nu$  — число Пуассона<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> При высоких температурах коэффициент Пуассона по опытам [31] приближается к половине; это, конечно, не означает, что материал становится несжимаемым, т. к. в этих опытах коэффициент Пуассона определялся косвенно. Из опытов вытекает, однако, что сжимаемостью материала в задачах ползучести обычно можно пренебрегать, так как с повышением температуры податливость материала в отношении деформаций сдвига резко возрастает по сравнению с податливостью объемному сжатию. В дальнейшем, как правило, мы не будем пренебрегать сжимаемостью материала, так как это пренебрежение не вносит сколько-нибудь значительных упрощений в развиваемый ниже метод решения.

Компоненты полной деформации

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^n + \varepsilon_x^y; \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y^n + \varepsilon_y^y; \quad \dots; \quad \gamma_{xz} = \gamma_{xz}^n + \gamma_{xz}^y. \quad (3.21)$$

Дифференцируя по времени, получаем:

$$\dot{\varepsilon}_x = \dot{\varepsilon}_x^n + \dot{\varepsilon}_x^y; \quad \dot{\varepsilon}_y = \dot{\varepsilon}_y^n + \dot{\varepsilon}_y^y; \quad \dots; \quad \dot{\gamma}_{xz} = \dot{\gamma}_{xz}^n + \dot{\gamma}_{xz}^y. \quad (3.22)$$

Внося сюда компоненты скорости деформации ползучести и упругой деформации и полагая  $B(t)f_1(T^2) = f(T^2, t)$ , находим<sup>1</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_x &= f(T^2, t) (\sigma_x - \sigma) + \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial t} \left( \sigma_x - \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma \right) \text{ и т. п.,} \\ \dot{\gamma}_{xy} &= 2f(T^2, t) \tau_{xy} + \frac{1}{G} \frac{\partial}{\partial t} \tau_{xy} \text{ и т. п.} \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

В частности при степенной зависимости

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_x &= B(t) T^{m-1} (\sigma_x - \sigma) + \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial t} \left( \sigma_x - \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma \right) \text{ и т. п.,} \\ \dot{\gamma}_{xy} &= 2B(t) T^{m-1} \tau_{xy} + \frac{1}{G} \frac{\partial}{\partial t} \tau_{xy} \text{ и т. п.} \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Полученные уравнения, обобщающие среду Максвелла, предложены многими исследователями (Джефрис [32], Одквист [37] и т. д.), заменявшими  $B(t)$  постоянной величиной. Это упрощение сильно ухудшает результаты теории в задачах неустановившейся ползучести и вряд ли целесообразно. Как и ранее (§ 2), уравнения (3.24) нетрудно при помощи преобразования

$$B(t) dt = d\Omega$$

привести к виду, не содержащему времени  $t$  в явной форме.

Введем теперь функцию напряжений и времени

$$\Lambda = \int_0^T f(\zeta, t) d\zeta \quad (3.25)$$

и условимся называть ее *дополнительным рассеянием*.

<sup>1</sup> Производную по времени следует понимать как полную (субстанциональную) производную, так как уравнения ползучести относятся к деформации определенной частицы тела. В рассматриваемом нами случае малой деформации полные производные можно заменить частными производными по времени.



Остановимся на механическом смысле  $\Lambda$ . Так как

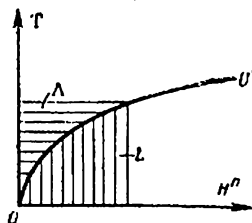
$$f(T^2, t) = \frac{H^n}{2T}; \quad dT^2 = 2T dT,$$

то

$$\Lambda = \int H^n dT = H^n T - \int T dH^n.$$

Следовательно, функция  $\Lambda$  по величине равна площади, заштрихованной на фиг. 17 горизонтальными линиями; кривая  $OO'$  здесь изображает зависимость  $H^n = 2f(T^2, t)T$  при фиксированном времени. Площадь, заштрихованная вертикальными линиями, представляет собой удельную работу деформации ползучести в единицу времени и равна

$$L = \int T dH^n. \quad (3.26)$$



Фиг. 17.

Величина  $L$  равна удельной мощности деформации, рассеиваемой при пластическом деформировании; по аналогии с функцией рассеяния в теории вязкой жидкости функция  $L$  может быть названа *рассеянием*. Дополнением площади  $L$  до прямоугольника  $H^n T$  является величина  $\Lambda$ .

Вследствие подобия кривых ползучести можно положить

$$\Lambda = B(t) \Lambda_1, \quad (3.27)$$

где  $\Lambda_1 = \Lambda_1(T^2)$  явно от времени не зависит. Наконец, для степенной зависимости

$$\Lambda = \frac{2B(t)}{m+1} T^{m+1} \quad (3.28)$$

(с точностью до несущественной аддитивной постоянной).

Нетрудно видеть, что уравнения, связывающие компоненты скорости деформации ползучести с напряжениями, могут быть представлены в форме:

$$\xi_x^n = \frac{\partial \Lambda}{\partial \sigma_x}; \quad \xi_y^n = \frac{\partial \Lambda}{\partial \sigma_y}; \quad \dots; \quad \tau_{zx}^n = \frac{\partial \Lambda}{\partial \tau_{zx}}. \quad (3.29)$$

Введем, далее, упругий потенциал

$$\Pi = \frac{3}{2} k \sigma^2 + \frac{1}{2G} T^2, \quad (3.30)$$

где  $k$  — коэффициент объемного сжатия, равный  $\frac{1-2\nu}{E}$ ; согласно формулам Кастильяно:

$$\varepsilon_x^y = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_x}, \quad \varepsilon_y^y = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_y}, \quad \dots, \quad \gamma_{xz}^y = \frac{\partial \Pi}{\partial \tau_{zx}}. \quad (3.31)$$

Теперь мы можем общие уравнения ползучести (3.23) представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_x &= \frac{\partial}{\partial \sigma_x} \left( \Lambda + \frac{\partial \Pi}{\partial t} \right) \text{ и т. п.,} \\ \eta_{xy} &= \frac{\partial}{\partial \tau_{xy}} \left( \Lambda + \frac{\partial \Pi}{\partial t} \right) \text{ и т. п.} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Функцию напряжений и времени

$$\Lambda + \frac{\partial \Pi}{\partial t} \equiv \Phi \quad (3.33)$$

условимся называть *дополнительной мощностью деформации*.

IV. Влияние температуры. Для рассмотрения ползучести неравномерно нагретых тел необходимы уравнения ползучести, учитывающие влияние температуры  $\theta$ . Нетрудно вывести эти уравнения. В правых частях (3.21) к относительным удлинениям следует добавить температурное расширение  $\alpha\theta$ , где  $\alpha$  — коэффициент линейного расширения. Будем считать, что температура  $\theta$  не зависит от времени. Тогда формулы (3.22) сохраняются полностью, общие соотношения (3.23) также остаются при условии, что функция  $f$  зависит и от температуры, т. е.

$$f = f(T^2, t, \theta).$$

Если, подобно предыдущему, ввести функцию

$$\Lambda = \int_0^{T^2} f(\zeta, t, \theta) d\zeta,$$

то упомянутые соотношения можно представить в виде формул (3.32).

В приложениях зависимости (3.23) при условии

$$f = f(T^2, t, \theta)$$

получают сложный вид, крайне затрудняющий решение даже простых задач. В частности, если исходить из степенной зависимости (3.24), то показатель  $m$ , вообще говоря, меняется с температурой. Иногда зависимость показателя  $m$  от температуры в данном интервале температур слабая и можно считать  $m$  постоянным.

В этом случае мы будем говорить о *простой* зависимости от температуры; тогда уравнения (3.24) сохраняют свою структуру (лишь функция  $B = B(t, \theta)$ ) и не вносят существенных усложнений в решения конкретных задач.

V. Замечание об уравнениях теории старения. В теории старения компоненты деформации связаны с компонентами напряжения. Формулы (3.21), очевидно, сохраняются; при этом компоненты упругой деформации определяются по закону Гука (3.20). Компоненты деформации ползучести связываются с напряжениями уравнениями теории малых упруго-пластических деформаций, включающими время в качестве параметра:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x^n &= f_*(T^2, t)(\sigma_x - \sigma) \\ &\text{и т. п.} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \gamma_{xy}^n &= 2f_*(T^2, t)\tau_{xy} \\ &\text{и т. п.} \end{aligned} \right\}. \quad (3.34)$$

При степенной зависимости

$$f_*(T^2, t) = \Omega(t) T^{m-1}, \quad (3.35)$$

где

$$\Omega(t) = \int_0^t B(t) dt. \quad (3.36)$$

Введем функцию напряжений и времени

$$R = \int_0^{T^*} f_*(\zeta, t) d\zeta \quad (3.37)$$

и назовем ее дополнительной работой. Тогда общие уравнения теории старения можно записать в форме:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial}{\partial \sigma_x} (R + \Pi) \quad \text{и т. п.,} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial}{\partial \tau_{xy}} (R + \Pi) \quad \text{и т. п.} \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

Дополнительная работа  $R$  имеет простой механический смысл (см. [7], гл. IV). Уравнения теории старения, как уже отмечалось выше (§ 2), неудовлетворительны.

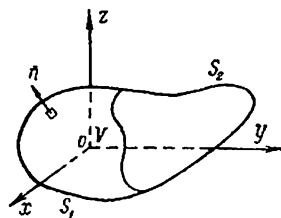
## ГЛАВА II

### ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ В ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Точное решение задач теории ползучести крайне трудно<sup>1</sup>, да и вряд ли необходимо, если учесть приближенный характер исходных уравнений ползучести. Поэтому важное значение приобретают приближенные методы решения. В этой главе устанавливаются вариационные принципы, на основе которых можно строить приближенные решения. Так, в следующей главе с помощью общего вариационного принципа (§ 4) будет дано приближенное решение задачи о неустановившейся ползучести.

#### § 4. Общий вариационный принцип

1. Вывод вариационного уравнения. Рассмотрим некоторое тело (фиг. 18), занимающее объем  $V$ , ограниченный поверхностью  $S$ , и находящееся в состоянии ползучести. Пусть на тело действуют объемные силы  $(X, Y, Z)$ ; на части поверхности  $S_1$  заданы поверхностные нагрузки  $(X_n, Y_n, Z_n)$ , а на остальной части  $S_2$  — скорости  $(v_x, v_y, v_z)$ . В некоторый момент времени  $t$  в рассматриваемом теле будут напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{zx}$ . Последние удовлетворяют трем дифференциальным уравнениям равновесия (силами инерции пренебрегаем вслед-



Фиг. 18.

<sup>1</sup> Полная система уравнений теории ползучести содержит уравнения (3.23), условия совместности Сен-Венана (для  $\xi_x, \dots, \eta_{zx}$ ) и дифференциальные уравнения равновесия.

ствие их ничтожности из-за крайней медленности процесса ползучести):

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \quad (x, y, z), \quad (4.01)$$

где символ  $(x, y, z)$  означает, что два других уравнения образуются круговой заменой букв  $x, y, z$ , и трем условиям равновесия на части поверхности  $S_1$ :

$$\sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) + \tau_{xz} \cos(n, z) = X_n \quad (x, y, z), \quad (4.02)$$

Кроме того, скорости точек части поверхности  $S_2$  должны иметь заданные значения. Напряжения, соответствующие этому реальному состоянию ползучести, будем называть *истинными*. Рассмотрим в тот же момент времени  $t$  некоторое мыслимое распределение напряжений:

$$\sigma_x + \delta \sigma_x; \quad \sigma_y + \delta \sigma_y; \quad \dots; \quad \tau_{xz} + \delta \tau_{xz},$$

бесконечно близкое к истинному и также удовлетворяющее дифференциальным уравнениям равновесия

$$\frac{\partial (\sigma_x + \delta \sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\tau_{xy} + \delta \tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial (\tau_{xz} + \delta \tau_{xz})}{\partial z} + X = 0 \quad (x, y, z) \quad (4.03)$$

и граничным условиям на  $S_1$ :

$$(\sigma_x + \delta \sigma_x) \cos(n, x) + (\tau_{xy} + \delta \tau_{xy}) \cos(n, y) + (\tau_{xz} + \delta \tau_{xz}) \cos(n, z) = X_n + \delta X_n \quad (x, y, z), \quad (4.04)$$

где  $\delta X_n, \delta Y_n, \delta Z_n$  — произвольные бесконечно малые вариации поверхностной нагрузки, а  $\delta \sigma_x, \delta \sigma_y, \dots, \delta \tau_{xz}$  — бесконечно малые вариации напряжений.

Поскольку мы не накладываем больше никаких условий на вариации напряжений, то новое, мыслимое напряженное состояние не может, вообще говоря, отвечать какой-либо сплошной деформации. Сплошность деформации отличает истинное напряженное состояние от близких мыслимых напряженных равновесных состояний. Покажем, что это

свойство истинного распределения напряжений выражается в экстремуме некоторой функции напряжений.

Вариации напряжений и поверхностных нагрузок, очевидно, уравновешиваются, т. е.

$$\frac{\partial \delta \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \delta \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (x, y, z), \quad (4.05)$$

$$\delta \sigma_x \cos(n, x) + \delta \tau_{xy} \cos(n, y) + \delta \tau_{xz} \cos(n, z) = \delta X_n \quad (x, y, z). \quad (4.06)$$

Рассмотрим теперь мощность вариаций напряжений на истинных скоростях

$$\int \int \int_V (\xi_x \delta \sigma_x + \xi_y \delta \sigma_y + \dots + \eta_{zx} \delta \tau_{zx}) dV.$$

Заменяя компоненты скорости деформации  $\xi_x, \xi_y, \dots, \eta_{zx}$  их выражениями через проекции скорости  $v_x, v_y, v_z$  по формулам (3.02), (3.03), интегрируем по частям:

$$\int \int \int \frac{\partial v_x}{\partial x} \delta \sigma_x dV = \int \int \int \frac{\partial}{\partial x} (v_x \delta \sigma_x) dV - \int \int \int v_x \frac{\partial \delta \sigma_x}{\partial x} dV$$

$$\dots \dots \dots \int \int \int \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \delta \tau_{xy} dV =$$

$$= \int \int \int \left[ \frac{\partial}{\partial y} (v_x \delta \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial x} (v_y \delta \tau_{xy}) \right] dV -$$

$$- \int \int \int \left[ v_x \frac{\partial \delta \tau_{xy}}{\partial y} + v_y \frac{\partial \delta \tau_{xy}}{\partial x} \right] dV.$$

Преобразуем теперь первые интегралы в правых частях по формуле Гаусса — Остроградского

$$\int \int \int \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV =$$

$$= \int \int_S [P \cos(n, x) + Q \cos(n, y) + R \cos(n, z)] dS \quad (4.07)$$

в интегралы по поверхности  $S$  и сложим все равенства; легко найдем после несложных преобразований

$$\begin{aligned} \int \int \int_V (\xi_x \delta \sigma_x + \xi_y \delta \sigma_y + \dots + \eta_{zx} \delta \tau_{zx}) dV = \\ = \int \int \int_V \left\{ v_x \left[ \frac{\partial \delta \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \delta \tau_{xz}}{\partial z} \right] + \right. \\ \left. + v_y \left[ \frac{\partial \delta \tau_{xy}}{\partial x} + \dots \right] + v_z \left[ \frac{\partial \delta \tau_{xz}}{\partial x} + \dots \right] \right\} dV + \\ + \int \int_S \{ v_x [\delta \sigma_x \cos(n, x) + \delta \tau_{xy} \cos(n, y) + \delta \tau_{xz} \cos(n, z)] + \\ + v_y [\dots] + v_z [\dots] \} dS. \end{aligned}$$

Но вариации напряжений удовлетворяют уравнениям равновесия (4.05), (4.06), следовательно:

$$\begin{aligned} \int \int \int_V (\xi_x \delta \sigma_x + \xi_y \delta \sigma_y + \dots + \eta_{zx} \delta \tau_{zx}) dV = \\ = \int \int_S (v_x \delta X_n + v_y \delta Y_n + v_z \delta Z_n) dS. \quad (4.08) \end{aligned}$$

Это уравнение справедливо для любой медленно движущейся сплошной среды. Обратимся к рассматриваемой нами теории ползучести; здесь компоненты скорости деформации  $\xi_x, \xi_y, \dots, \eta_{zx}$  связаны с напряжениями зависимостями (3.32). Далее, вариации напряжений  $\delta \sigma_x, \delta \sigma_y, \dots, \delta \tau_{zx}$  и вариации поверхностной нагрузки  $\delta X_n, \delta Y_n, \dots, \delta Z_n$  сообщаются нами мысленно в некоторый фиксированный момент времени  $t$ . Эти вариации совершенно не связаны с вариациями в сколь угодно близкий момент времени  $t + dt$  и во времени могут изменяться произвольно, хотя бы скачкообразно. Наложим теперь ограничение на характер изменения вариаций во времени. Именно, потребуем, чтобы вариации напряжений и внешних сил не изменялись во времени. Таким образом, вариации будут как бы застывшими в течение всего процесса. Тогда операции дифференцирования и варьирования можно менять местами, причем

$$\delta \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \delta \sigma_x = 0; \quad \dots; \quad \delta \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \delta \tau_{zx} = 0. \quad (4.09)$$



Теперь, пользуясь соотношениями (3.32) и условиями (4.09), получаем:

$$\xi_x \delta \sigma_x + \xi_y \delta \sigma_y + \dots + \eta_{zx} \delta \tau_{zx} = \delta \left( \Lambda + \frac{\partial \Pi}{\partial t} \right), \quad (4.10)$$

причем

$$\delta \frac{\partial \Pi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \delta \Pi.$$

Таким образом, вариационное уравнение (4.08) приобретает вид:

$$\delta \int_V \int \left( \Lambda + \frac{\partial \Pi}{\partial t} \right) dV = \int_S (v_x \delta X_n + v_y \delta Y_n + v_z \delta Z_n) dS. \quad (4.11)$$

Пусть мощность вариаций внешних сил на истинных скоростях равна нулю

$$\int_S (v_x \delta X_n + v_y \delta Y_n + v_z \delta Z_n) dS = 0. \quad (4.12)$$

Это условие выполняется, например, в случаях:

1. На поверхности тела  $S$  заданы напряжения, тогда  $\delta X_n = \delta Y_n = \delta Z_n = 0$  на  $S$ . Этот случай мы будем называть *основной задачей*.

2. Часть поверхности тела  $S_1$  свободна от напряжений, на другой части  $S_2$  заданы постоянные смещения; тогда на  $S_2$   $v_x = v_y = v_z = 0$ . Задачи этого типа при условии равенства нулю и объемных сил мы будем называть *релаксационными задачами*.

3. На части поверхности тела  $S_1$  заданы напряжения, а на другой части  $S_2$  — постоянные смещения (*смешанная задача*).

Итак, при условии (4.12):

$$\delta \int_V \int \left( \Lambda + \frac{\partial \Pi}{\partial t} \right) dV = 0, \quad (4.13)$$

т. е. истинное распределение напряжений характеризуется стационарностью дополнительной мощности деформации тела.

Вследствие подобия кривых ползучести, уравнение (4.13) можно переписать в виде:

$$\delta \int \int_V \left[ B(t) \Lambda_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial t} \right] dV = 0, \quad (4.14)$$

где  $\Lambda_1$  явно от времени не зависит. Наконец, при степенной зависимости уравнение (4.13) принимает форму

$$\delta \int \int_V \left[ \frac{2B(t)}{m+1} T^{m+1} + \frac{\partial \Pi}{\partial t} \right] dV = 0. \quad (4.15)$$

Установленный вариационный принцип в некотором смысле можно рассматривать как обобщение принципа Кастильяно.

В дальнейшем чертой сверху мы будем иногда обозначать интеграл по объему  $V$  от соответствующей величины, например:

$$\bar{\Lambda} = \int \int_V \Lambda dV; \quad \bar{\Pi} = \int \int_V \Pi dV \quad \text{и т. д.}$$

II. Некоторые следствия. 1. Пусть  $P_i$  ( $i=1, 2, 3, \dots$ ) — сосредоточенные силы, приложенные к телу,  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  — соответствующие направляющие косинусы этих сил,  $v_{xi}, v_{yi}, v_{zi}$  — проекции скорости точки приложения силы  $P_i$ . Тогда, исходя из общего вариационного уравнения (4.11) и полагая, что только одна сила  $P_i$  получает бесконечно малое приращение  $\delta P_i$ , а опоры тела неподвижны, находим:

$$\delta \left( \bar{\Lambda} + \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t} \right) = (v_{xi}\alpha_i + v_{yi}\beta_i + v_{zi}\gamma_i) \delta P_i.$$

Но выражение внутри круглых скобок в правой части этого уравнения есть проекция  $\tilde{v}_i$  скорости точки приложения силы  $P_i$  на линию действия последней, следовательно:

$$\frac{\partial}{\partial P_i} \left( \bar{\Lambda} + \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t} \right) = \tilde{v}_i, \quad (4.16)$$

т. е. частная производная дополнительной мощности деформации тела по величине любой приложенной сосредоточенной силы равна скорости точки приложения этой силы по

направлению действия последней. Обычными рассуждениями нетрудно установить, что это утверждение справедливо и в отношении обобщенных сил и скоростей. Приведенная теорема очень удобна для определения скоростей ползучести в отдельных точках тела, и в дальнейшем мы неоднократно будем ею пользоваться.

2. Пусть напряженное состояние тела является функцией некоторого числа параметров („лишние неизвестные“)  $X_1, X_2, \dots, X_s$ . Условие стационарности дополнительной мощности деформации  $\bar{\Phi}$  приводит в этом случае к системе уравнений

$$\frac{\partial}{\partial X_i} \left( \bar{\Lambda} + \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t} \right) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad (4.17)$$

которая является системой дифференциальных уравнений первого порядка относительно производных  $\frac{dX_i}{dt}$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ). Для определенности задачи к системе (4.17) следует присоединить начальные условия

$$X_i|_{t=0} = X_{i0}. \quad (4.18)$$

Значения  $X_{i0}$  находятся из решения соответствующей упругой задачи. Так как  $\bar{\Lambda} = B(t) \bar{\Lambda}_1$ , где  $\bar{\Lambda}_1$  явно от времени не зависит, то система (4.17) имеет вид:

$$B(t) \frac{\partial \bar{\Lambda}_1}{\partial X_i} + \frac{\partial^2 \bar{\Pi}}{\partial X_i^2} \frac{dX_i}{dt} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (4.19)$$

В качестве простого примера рассмотрим задачу о ползучести прежней решетки (§ 2). С помощью (3.28) получаем:

$$\bar{\Lambda} = Fl \frac{B_1(t)}{m+1} \left[ \sigma_1^{m+1} + 2 \left( \frac{P}{F} - \sigma_1 \right)^{m+1} \right],$$

где через  $\sigma_1 > 0$  обозначено лишнее неизвестное — напряжение в стержне 1. Далее

$$\bar{\Pi} = Fl \frac{1}{2E} \left[ \sigma_1^2 + 2 \left( \frac{P}{F} - \sigma_1 \right)^2 \right].$$

Согласно (4.19) приходим к прежнему дифференциальному уравнению

$$\frac{3}{E} \frac{d\sigma_1}{dt} + B_1(t) \left[ \sigma_1^m - 2 \left( \frac{P}{F} - \sigma_1 \right)^m \right] = 0$$

при начальном условии

$$\sigma_1|_{t=0} = \frac{2}{3} \frac{P}{F}.$$

Заметим, что система уравнений (4.19) относится не только к случаю действия постоянных нагрузок, но и к релаксационным задачам, когда на границах тела заданы постоянные смещения. Остановимся кратко на простейшем примере релаксации напряжений в стержне (§ 2); неизвестным здесь является напряжение  $\sigma_x(t) > 0$ . Дополнительная мощность деформации стержня

$$\bar{\Lambda} + \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t} = \frac{2lF}{m+1} B_1(t) \sigma_x^{m+1} + \frac{\partial lF}{\partial t} \frac{1}{2E} \sigma_x^2,$$

где  $l$  — длина стержня, а  $F = \text{const}$  — площадь поперечного сечения. Условие стационарности  $\bar{\Phi}$  приводит к известному нам дифференциальному уравнению релаксации

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_x} \left( \bar{\Lambda} + \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t} \right) = lF \left[ B_1(t) \sigma_x^m + \frac{1}{E} \frac{d\sigma_x}{dt} \right] = 0.$$

## § 5. Начальное упругое состояние

В начальный момент времени  $t=0$  (при нагружении) деформации ползучести равны нулю, и тело получает лишь упругие деформации, подчиняющиеся закону Гука<sup>1</sup>. Таким образом, начальное состояние тела является упругим состоянием и описывается уравнениями теории упругости. Компоненты напряжения, деформации и т. п., относящиеся к начальному состоянию тела, мы будем иногда отличать одним штрихом (например,  $\sigma'_x, \sigma'_y, \dots; \epsilon'_x, \epsilon'_y, \dots$  и т. д.).

Ниже приведены формулировки известных вариационных принципов теории упругого тела, так как в дальнейшем они нам понадобятся.

1. Принцип минимума потенциальной энергии системы. Форма, которую принимает упругое тело под действием заданных сил и перемещений, отличается от

<sup>1</sup> Случай пластической деформации, происходящей при нагружении тела, также может быть рассмотрен, но мы на нем не останавливаемся.

всех возможных (с точки зрения наложенных геометрических связей) тем, что только истинная форма равновесия тела сообщает минимум полной энергии системы

$$\delta \left\{ \int \int \int_V \Pi dV - \mathcal{A} \right\} = 0, \quad (5.01)$$

где

$$\Pi = \frac{\varepsilon^2}{6k} + \frac{G}{2} \Gamma^2 \quad (5.02)$$

есть плотность упругой потенциальной энергии тела, выраженная в функции компонентов деформации, а

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = \int \int \int_V (Xu_x + Yu_y + Zu_z) dV + \\ + \int \int_S (X_n u_x + Y_n u_y + Z_n u_z) dS \end{aligned} \quad (5.03)$$

есть работа внешних сил; варьируются смещения  $u_x, u_y, u_z$ , причем внешние силы не зависят от смещений.

II. Принцип Кастильяно. Истинное напряженное состояние упругого тела в отличие от мыслимых статически возможных напряженных состояний, отвечающих тем же приложенным внешним силам, сообщает упругой потенциальной энергии тела минимум, т. е.

$$\delta \int \int \int_V \Pi dV = 0 \quad (\delta^2 \Pi > 0). \quad (5.04)$$

Здесь  $\Pi$  выражено в функции напряжений, т. е.

$$\Pi = \frac{3}{2} k \sigma^2 + \frac{1}{2G} T^2. \quad (5.05)$$

## § 6. Состояние установившейся ползучести

I. Состояние установившейся ползучести. Обратимся теперь к основным уравнениям ползучести (3.23). Отбросим в этих уравнениях слагаемые, относящиеся к упругой деформации, и функцию  $B(t)$  заменим ее предельным значением  $B(\infty)$  (напомним, что вследствие подобия кривых

получести  $f(T^2, \infty) = B(\infty)f_1(T^2) \equiv f(T^2)$ . Тогда уравнения (3.23) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \xi_x = f(T^2)(\sigma_x - \sigma) \\ \text{и т. п.} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \eta_{xy} = 2f(T^2)\tau_{xy} \\ \text{и т. п.} \end{aligned} \right\}. \quad (6.01)$$

Разрешая эти уравнения относительно компонентов напряжения, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma = 4g(H^2)\xi_x \\ \text{и т. п.} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \tau_{xy} = 2g(H^2)\eta_{xy} \\ \text{и т. п.} \end{aligned} \right\}. \quad (6.02)$$

При этом

$$H = 2f(T^2)T \quad \text{или} \quad T = 2g(H^2)H. \quad (6.03)$$

Введя функции:

$$\Lambda = \int_0^{T^2} f(\zeta) d\zeta; \quad L = \int_0^{H^2} g(\zeta) d\zeta, \quad (6.04)$$

которые встречались уже ранее (§ 3), мы можем представить соотношения (6.01) и (6.02) в форме:

$$\xi_x = \frac{\partial \Lambda}{\partial \sigma_x}; \quad \xi_y = \frac{\partial \Lambda}{\partial \sigma_y}; \quad \dots; \quad \eta_{zx} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \tau_{zx}} \quad (6.05)$$

$$\sigma_x - \sigma = \frac{\partial L}{\partial \xi_x}; \quad \sigma_y - \sigma = \frac{\partial L}{\partial \xi_y}; \quad \dots; \quad \tau_{yx} = \frac{\partial L}{\partial \eta_{yx}}. \quad (6.06)$$

Напомним, что  $\Lambda$  называется дополнительным рассеянием, а  $L$  — рассеянием. В случае степенной зависимости

$$H = 2B(\infty)T^m \quad \text{или} \quad T = 2B^*(\infty)H^\mu, \quad (6.07)$$

где положено

$$B^*(\infty) = \frac{1}{2} [2B(\infty)]^{-1/\mu}. \quad (6.08)$$

Следовательно:

$$f(T^2) = B(\infty)T^{m-1} \quad \text{или} \quad g(H^2) = B^*(\infty)H^{\mu-1}. \quad (6.09)$$

Нетрудно, наконец, найти, что

$$\Lambda = \frac{2B(\infty)}{m+1} T^{m+1}, \quad (6.10)$$

$$L = \frac{2B^*(\infty)}{\mu+1} H^{\mu+1}. \quad (6.11)$$

<sup>1</sup> По недосмотру автора в формулах (56.05) в [7] пропущена  $\sigma$ .

Рассмотрим теперь задачу о ползучести тела, подчиняющегося принятым нами усеченным уравнениям, под действием *постоянных во времени* нагрузок и скоростей (на  $S_2$ ). Внеся (6.06) в дифференциальные уравнения равновесия и перейдя с помощью (3.02), (3.03) к проекциям скорости  $v_x, v_y, v_z$ , мы получим для неизвестных функций  $v_x, v_y, v_z$  систему трех дифференциальных уравнений; четвертым уравнением служит условие несжимаемости  $\text{div } \vec{v} = 0$ . Очевидно, что время и дифференцирование по времени не будут входить в эти уравнения и в граничные условия. Следовательно, решение поставленной задачи представляет собою установившееся течение тела, характеризующееся постоянством во времени напряжений и скоростей деформации. Условимся называть это решение состоянием установившейся ползучести и будем отличать его двумя штрихами (например  $\sigma_x'', \sigma_y'', \dots$ ;  $\xi_x'', \xi_y'', \dots$ ;  $v_x'', \dots$  и т. д.).

Если мы заменим в соотношениях (6.01), (6.02) компоненты скорости деформации  $\xi_x, \xi_y, \dots$  компонентами деформации  $e_x, e_y, \dots$ , а скорости  $v_x, v_y, v_z$ , заданные на  $S_2$ , смещениями  $u_x, u_y, u_z$  в единицу времени, то тем самым мы придем к задаче теории малых упруго-пластических деформаций, так как уравнения (6.01), (6.02) перейдут при этом в уравнения теории малых упруго-пластических деформаций (с точностью до размерности функций  $f(\dots)$ ,  $g(\dots)$ ) для состояния упрочнения (см. [7], стр. 52). Таким образом, решение задач установившейся ползучести, по существу, ничем не отличается от решения соответствующих задач теории малых упруго-пластических деформаций для состояния упрочнения.

В теории установившейся ползучести важное значение имеют два вариационных принципа, аналогичные принципам теории упругости.

II. Принцип минимума мощности системы. Пусть  $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xy}$  — напряжения, а  $v_x, v_y, v_z$  — скорости, соответствующие истинному движению точек тела под действием объемных сил  $X, Y, Z$ , поверхностных нагрузок  $X_n, Y_n, Z_n$  (на  $S_1$ ) и постоянных во времени скоростей  $v_x, v_y, v_z$ , заданных на  $S_2$ . Сообщим точкам тела бесконечно малые приращения скоростей  $\delta v_x, \delta v_y, \delta v_z$ , удовле-

творяющие заданным условиям для скоростей на  $S_2$  (т. е. на  $S_2$   $\delta v_x = \delta v_y = \delta v_z = 0$ ) и уравнению несжимаемости:

$$\frac{\partial}{\partial x} \delta v_x + \frac{\partial}{\partial y} \delta v_y + \frac{\partial}{\partial z} \delta v_z = 0. \quad (6.12)$$

Рассмотрим мощность внутренних сил на вариациях скоростей

$$\int \int \int_V (\sigma_x \delta \xi_x + \sigma_y \delta \xi_y + \dots + \tau_{xz} \delta \eta_{xz}) dV.$$

Воспользовавшись соотношениями (3.02), (3.03), интегрируя по частям и применяя формулу Гаусса — Остроградского (см. аналогичное преобразование в § 4), найдем, что, в силу дифференциальных уравнений равновесия (4.01) и граничных условий (4.02), справедливо уравнение:

$$\begin{aligned} \int \int \int_V (\sigma_x \delta \xi_x + \sigma_y \delta \xi_y + \dots + \tau_{xz} \delta \eta_{xz}) dV = \\ = \int \int \int_V (X \delta v_x + Y \delta v_y + Z \delta v_z) dV + \\ + \int \int_S (X_n \delta v_x + Y_n \delta v_y + Z_n \delta v_z) dS. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Для рассматриваемой нами среды компоненты скорости деформации и напряжения связаны уравнениями установившейся ползучести (6.06); с их помощью легко получаем:

$$\sigma_x \delta \xi_x + \sigma_y \delta \xi_y + \dots + \tau_{xz} \delta \eta_{xz} = \delta L.$$

Пусть, далее, внешние силы  $X, Y, Z; X_n, Y_n, Z_n$  не зависят от скоростей точек тела; тогда уравнение (6.13) принимает вид:

$$\delta \left\{ \int \int \int_V L dV - \mathcal{L} \right\} = 0, \quad (6.14)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \int \int \int_V (X v_x + Y v_y + Z v_z) dV + \\ + \int \int_S (X_n v_x + Y_n v_y + Z_n v_z) dS \end{aligned} \quad (6.15)$$



есть мощность внешних сил. Выражение внутри фигурных скобок в (6.14) условимся называть *мощностью системы*.

Нетрудно показать, что для истинного движения *мощность системы достигает минимума*. В самом деле, вторая вариация мощности системы равна

$$\delta^2 \bar{L} = \int \int \int_V \delta^2 L \, dV.$$

Но, подобно тому, как это сделано в теории малых упруго-пластических деформаций (см. [7], § 34), можно получить, что

$$\delta^2 L = \left[ \frac{\delta(H^2)}{2H} \right]^2 \frac{dT}{dH} + \left\{ H^2 (\delta \xi_x, \delta \xi_y, \dots, \delta \eta_{zx}) - \left[ \frac{\delta(H^2)}{2H} \right]^2 \right\} \frac{T}{H},$$

где через  $H(\delta \xi_x, \delta \xi_y, \dots, \delta \eta_{zx})$  обозначена интенсивность вариаций скоростей сдвига; напомним, что

$$\xi_x + \xi_y + \xi_z = 0; \quad \delta \xi_x + \delta \xi_y + \delta \xi_z = 0.$$

Величина внутри фигурных скобок не может быть отрицательной (см. [7]); далее, для реальных тел всегда

$$\frac{dT}{dH} > 0.$$

Легко видеть, что  $\delta^2 L$  может обратиться в нуль только при всех вариациях, одновременно обращающихся в нуль, следовательно,  $\delta^2 L > 0$ .

В заключение, вернемся к уравнению (6.14); пусть объемные силы равны нулю, часть поверхности тела  $S_1$  свободна от нагрузок, а на  $S_2$  заданы скорости; тогда  $\delta \mathcal{L} = 0$  и уравнение (6.14) принимает вид:

$$\delta \bar{L} = 0. \quad (6.16)$$

III. Минимальные свойства напряженного состояния. Сопоставляя истинное распределение напряжений с бесконечно близкими мыслимыми статически возможными распределениями напряжений и поступая так же, как и в § 4, мы приходим к вариационному уравнению

$$\delta \int \int \int_V \Lambda \, dV = \int \int_S (v_x \delta X_n + v_y \delta Y_n + v_z \delta Z_n) \, dS, \quad (6.17)$$

которое является укороченным уравнением (4.11). Мощность вариаций поверхностных нагрузок, стоящая в правой части уравнения, обращается в нуль в тех же частных случаях, какие рассмотрены в § 4; тогда из уравнения (6.17) получаем:

$$\delta \bar{\Lambda}_1 = 0. \quad (6.18)$$

Для истинного распределения напряжений реализуется минимум дополнительного рассеяния  $\bar{\Lambda}$ , правда, при одном добавочном условии, возникающем из-за несжимаемости среды в состоянии установившейся ползучести. Вычисляя вторую вариацию  $\delta^2 \Lambda_1$ , получим (см. аналогичную формулу в [1], § 43):

$$\delta^2 \Lambda_1 = \left[ \frac{\delta(T^2)}{2T} \right]^2 \frac{dH}{dT} + \left\{ T^3 (\delta\sigma_x, \delta\sigma_y, \dots, \delta\tau_{zx}) - \left[ \frac{\delta(T^2)}{2T} \right]^2 \right\} \frac{H}{T}.$$

Выражение внутри фигурной скобки неотрицательно, а для реальных материалов  $\frac{dH}{dT} > 0$ . Пусть вариации нормальных напряжений удовлетворяют условию

$$\delta\sigma_x + \delta\sigma_y + \delta\sigma_z = 0.$$

Выясняя теперь условия одновременного обращения в нуль величин  $\delta(T^2)$  и  $\{\dots\}$ , нетрудно найти, что  $\delta^2 \Lambda_1 > 0$ .

Из полученных вариационных уравнений вытекают важные для приложений следствия, подобные рассмотренным выше следствиям вариационного уравнения (4.11); приведем лишь окончательные формулировки:

1. В случае действия сосредоточенных сил  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ):

$$\frac{\partial \bar{\Lambda}}{\partial P_i} = \tilde{v}_i \quad (6.19)$$

2. В случае „лишних неизвестных“  $X_i$  последние определяются из системы уравнений:

$$\frac{\partial \bar{\Lambda}}{\partial X_i} = 0. \quad (6.20)$$

### § 7. О приближении к состоянию установившейся ползучести

1. В § 2 на примере ползучести решетки было показано, что под действием постоянной нагрузки напряженное состояние изменяется от начального упругого к состоянию установившейся ползучести. Подобная картина вообще характерна для ползучести тел под действием постоянных нагрузок. Можно считать (доказательство этого положения отсутствует), что по прошествии известного промежутка времени наступает состояние ползучести, близкое к установившемуся. Если этот промежуток мал по сравнению с длительностью „жизни“ рассматриваемого тела, то изучение ползучести последнего можно проводить, основываясь на уравнениях установившейся ползучести, что значительно проще. В задачах релаксационного типа установившееся состояние характеризуется отсутствием напряжений и скоростей деформации; общая же картина ползучести также сводится к изменению напряженного состояния от начального упругого к установившемуся (нулевому) состоянию.

Рассмотрим *основную задачу*, в которой заданы постоянные внешние нагрузки; тогда напряженное состояние тела определяется вариационным уравнением:

$$\delta \left( \bar{\Lambda} + \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t} \right) = 0.$$

Интегрируя это уравнение по времени от 0 до  $t$ , получаем:

$$\delta \left[ \int_0^t \bar{\Lambda} dt + \bar{\Pi}(t) \right] - \delta \bar{\Pi}(0) = 0,$$

где  $\bar{\Pi}(t)$  — упругая потенциальная энергия тела в момент времени  $t$ ,  $\bar{\Pi}(0)$  — упругая потенциальная энергия тела в начальный момент времени  $t = 0$ . Но в начальный момент времени распределение напряжений упругое, поэтому в случае заданных внешних сил оно удовлетворяет уравнению Кастильяно  $\delta \bar{\Pi}(0) = 0$ ; следовательно

$$\delta \left[ \int_0^t \bar{\Lambda} dt + \bar{\Pi}(t) \right] = 0. \quad (7.01)$$

Основываясь на этом уравнении, можно указать критерий приближения к состоянию установившейся ползучести, если воспользоваться некоторыми соображениями, имеющими, правда, нестрогий характер. Будем полагать, что упругая энергия  $\bar{\Pi}(t)$  не может существенно превышать энергию  $\bar{\Pi}(0)$ ; это вытекает из постоянства действующих внешних нагрузок, вследствие чего в теле всегда будут конечные напряжения в достаточно большой части объема  $V$  при конечных нагрузках; более того, по той же причине  $\bar{\Pi}(t)$  и  $\bar{\Lambda}(t)$  ограничены. Известно, что деформированное и напряженное состояния упругого тела в существенном определяются главными членами в выражении упругой энергии. Подобное же положение справедливо, конечно, и в теории ползучести. Здесь с течением времени соотношение между положительными величинами  $\bar{\Pi}(t)$  и  $\int_0^t \bar{\Lambda}(t) dt$  меняется, так как  $\int_0^t \bar{\Lambda} dt$

возрастает вместе со временем. В начале процесса ползучести (при малых  $t$ ) превалирует  $\bar{\Pi}(t)$ , и тогда напряженное состояние характеризуется уравнениями теории упругости.

Позднее  $\int_0^t \bar{\Lambda} dt$  становится более значительным по величине, и тогда напряженное состояние характерно для состояния установившейся ползучести. Таким образом, состояние ползучести, близкое к установившемуся, наступает тогда, когда деформации ползучести превышают более или менее значительно упругие деформации, соответствующие напряженному состоянию при больших  $t$ .

Это замечание относится лишь к случаю действия заданных внешних сил (т. к. здесь  $\delta\bar{\Pi}(0) = 0$ ).

## § 8. Теорема энергии

1. Неустановившаяся ползучесть. Пусть тело, испытывающее ползучесть, занимает объем  $V$ , ограниченный поверхностью  $S$ , пусть на части  $S_1$  этой поверхности заданы напряжения  $X_n, Y_n, Z_n$ , а на остальной части  $S_2$  заданы

скорости точек  $S_2$ . Рассмотрим мощность внешних сил

$$\mathcal{L} = \int \int \int_V (Xv_x + Yv_y + Zv_z) dV + \\ + \int \int_S (X_nv_x + Y_nv_y + Z_nv_z) dS.$$

Исключая в поверхностном интеграле величины  $X_n, Y_n, Z_n$  с помощью соотношений (4.02) и преобразовывая его в объемный по формуле Гаусса — Остроградского, получаем:

$$\mathcal{L} = \int \int \int_V \left\{ v_x \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \right) + v_y (\dots) + \right. \\ \left. + v_z (\dots) \right\} dV + \int \int \int_V (\tau_{xx}\xi_x + \sigma_y\xi_y + \dots + \tau_{zx}\eta_{zx}) dV.$$

Вследствие уравнений равновесия (4.01) первый интеграл в правой части равен нулю, следовательно:

$$\mathcal{L} = \int \int \int_V (\sigma_x\xi_x + \sigma_y\xi_y + \dots + \tau_{zx}\eta_{zx}) dV. \quad (8.01)$$

Это соотношение справедливо для достаточно медленного движения всякого сплошного тела. В случае ползучести напряжения и компоненты скорости деформации связаны формулами (3.32); с помощью последних легко находим:

$$\mathcal{L} = \int \int \int_V \left\{ \left( \sigma_x \frac{\partial \Lambda}{\partial \sigma_x} + \dots + \tau_{zx} \frac{\partial \Lambda}{\partial \tau_{zx}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial t} \left( \sigma_x \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_x} + \dots + \tau_{zx} \frac{\partial \Pi}{\partial \tau_{zx}} \right) - \right. \\ \left. - \left( \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_x} \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} + \dots + \frac{\partial \Pi}{\partial \tau_{zx}} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial t} \right) \right\} dV.$$

Величина внутри последней круглой скобки равна  $\frac{\partial \Pi}{\partial t}$ ; г. к.  $\Pi$  — однородная квадратичная форма напряжений, то вторая скобка равна  $2\Pi$ ; далее, мы примем степенной закон ползучести; тогда  $\Lambda$  — однородная функция напряжений степени  $m+1$  и величина внутри первой скобки равна  $(m+1)\Lambda$ . Таким образом:

$$\mathcal{L} = \int \int \int_V \left[ (m+1)\Lambda + \frac{\partial \Pi}{\partial t} \right] dV. \quad (8.02)$$

Первое слагаемое в правой части есть мощность деформации ползучести, второе — скорость приращения упругой потенциальной энергии тела.

Рассмотрим в качестве примера *релаксационные* задачи. В этих задачах напряжения на  $S_1$  равны нулю, а на  $S_2$  заданы постоянные смещения, следовательно,  $v_x = v_y = v_z = 0$  на  $S_2$ ; таким образом  $\mathcal{L} = 0$ , и уравнение (8.02) получает вид:

$$\iiint_V \left[ (m+1) \Lambda + \frac{\partial \Pi}{\partial t} \right] dV = 0. \quad (8.03)$$

Так как  $\Lambda$  положительно, то из (8.03) вытекает, что упругая потенциальная энергия тела все время убывает. Уравнением (8.03), как мы увидим ниже, удобно пользоваться при рассмотрении релаксационных задач.

II. Состояние установившейся ползучести. Воспользуемся основным уравнением (8.02) и введем в него компоненты скорости деформации  $\xi_x, \xi_y, \dots, \eta_{zx}$  по уравнениям установившейся ползучести (6.01). После несложных преобразований найдем, что подинтегральное выражение равно  $2f(T^2)T^2$  или, вследствие (6.03), просто  $TH$ . Таким образом

$$\mathcal{L} = \iiint_V TH dV. \quad (8.04)$$

В случае степенной зависимости с помощью (6.07) получаем из (8.04):

$$\mathcal{L} = (m+1) \bar{\Lambda} = (\mu+1) \bar{L}. \quad (8.05)$$

III. Принцип Сен-Венана. В тесной связи с теоремой энергии находится принцип Сен-Венана, справедливый, конечно, и в теории ползучести. По этому принципу систему сил, действующую на относительно малую часть тела, можно заменить любой другой статически эквивалентной системой усилий, т. е. при этом напряженное и деформированное состояния тела заметно изменяются лишь вблизи рассматриваемого места приложения нагрузки.

### ГЛАВА III

#### ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

В начальный момент времени  $t=0$  распределение напряжений и деформаций описывается уравнениями теории упругости. Вследствие ползучести напряженное состояние тела с течением времени будет изменяться, стремясь (при постоянных внешних воздействиях на тело) к состоянию установившейся ползучести. Можно считать, что при достаточно большом времени состояние тела будет близко к установившемуся состоянию. Тем не менее важно знать протекание процесса неустановившейся ползучести; во-первых, потому что многие тела находятся в состоянии неустановившейся ползучести в течение большей части своей „жизни“ (например, турбинные диски), во-вторых, даже в случае тел, пребывающих значительную часть своей „жизни“ в состоянии установившейся ползучести, часто необходимо знать темп приближения к установившемуся состоянию. Упомянем, наконец, о важном классе релаксационных задач.

Точное решение задач неустановившейся ползучести является очень трудной математической задачей даже в простых случаях (например, в задаче чистого изгиба). Так как исходный закон ползучести описывает явление ползучести приближенно, то нет смысла искать точные решения при помощи тех или иных сложных и громоздких методов, тем более, что с качественной стороны картина неустановившейся ползучести проста. Ниже дано эффективное приближенное решение задач неустановившейся ползучести, основанное на общем вариационном принципе, доказанном в предыдущей главе.

### § 9. Неустановившаяся ползучесть при заданных нагрузках

1. Общее решение. Пусть на поверхности тела  $S$  заданы напряжения  $X_n, Y_n, Z_n$ , неизменные во времени (так же, как и объемные силы  $X, Y, Z$ ). В начальный момент времени  $t=0$  распределение напряжений и деформаций описывается уравнениями теории упругости; соответствующие величины мы условились ранее отличать одним штрихом ( $\sigma'_x, \sigma'_y, \dots, \tau'_{zx}; \epsilon'_x, \epsilon'_y, \dots$ ); мы предполагаем, что это решение известно. Напряжения и скорости деформации, отвечающие состоянию установившейся ползучести, мы отличаем двумя штрихами ( $\sigma''_x, \sigma''_y, \dots; \epsilon''_x, \epsilon''_y, \dots$ ). Будем считать, что это решение также известно.

При заданных нагрузках картина неустановившейся ползучести сводится к медленному и монотонному изменению напряженного состояния от упругого (при  $t=0$ ) к установившемуся (при  $t=\infty$ ). Это подсказывает следующий способ построения приближенного решения.

Процесс неустановившейся ползучести определяется, как мы знаем (§ 4), вариационным уравнением

$$\delta \int \int \int_V \left( \Lambda + \frac{\partial \Pi}{\partial t} \right) dV = 0. \quad (9.01)$$

Напомним, что здесь сопоставляются статически возможные напряженные состояния. Будем искать приближенное решение уравнения (9.01) в виде:

$$\sigma_x = \tilde{\tau}(t) \sigma'_x + \tau(t) \sigma''_x; \quad \dots; \quad \tau_{zx} = \tilde{\tau}(t) \tau'_{zx} + \tau(t) \tau''_{zx},$$

где  $\tilde{\tau}(t), \tau(t)$  — произвольные функции времени. Так как системы напряжений  $\sigma'_x, \sigma'_y, \dots, \tau'_{zx}$  и  $\sigma''_x, \sigma''_y, \dots, \tau''_{zx}$  удовлетворяют в отдельности дифференциальным уравнениям равновесия (4.01) и граничным условиям (4.02), то для того, чтобы построенная система напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{zx}$  была статически возможной, необходимо, чтобы

$$\tilde{\tau}(t) + \tau(t) = 1.$$





и от  $\tau$  не зависит; при этом предполагается, что начальное упругое состояние и состояние установившейся ползучести тождественно не совпадают (т. е.  $\tilde{\sigma} \neq 0$ ,  $\tilde{T} \neq 0$  одновременно). Вернемся теперь к уравнению (9.03). Это уравнение с разделяющимися переменными; интегрируя его при очевидном начальном условии:

$$\text{при } t = 0 \quad \tau = 0 \quad (9.06)$$

(в начальный момент времени распределение напряжений упругое), находим:

$$\Omega(t) = \frac{d^2 \Pi}{d\tau^2} \int_0^{\tau} \frac{d\tau}{P(\tau)}, \quad (9.07)$$

где  $\Omega(t)$  имеет прежнее значение (§ 3), а:

$$P(\tau) = -\frac{d\bar{\Lambda}_1}{d\tau} = -\int \int_V f_1(T^2) \frac{\partial T^2}{\partial \tau} dV. \quad (9.08)$$

Напряжения  $\sigma_x'', \sigma_y'', \dots, \tau_{zx}''$  являются решением вариационного уравнения (см. § 6):

$$\delta \bar{\Lambda}_1 = 0.$$

Если искать решение этого уравнения в форме (9.02), то для  $\tau(t)$  получится уравнение

$$\int \int_V f_1(T^2) \frac{\partial T^2}{\partial \tau} dV = 0.$$

Это уравнение имеет очевидное решение  $\tau = 1$ . Следовательно:

$$P(1) = 0. \quad (9.09)$$

Заметим, что  $f_1(T^2) > 0$ , а  $\frac{\partial T^2}{\partial \tau}$  есть линейная функция  $\tau$ . Далее, вычисляем

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\tau} = & - \left[ \int \int_V \frac{df_1}{dT^2} \left( \frac{\partial T^2}{\partial \tau} \right)^2 dV + \right. \\ & \left. + \int \int_V f_1(T^2) \frac{\partial^2 T^2}{\partial \tau^2} dV \right]. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial^2 T^2}{\partial \tau^2} = 2\tilde{T}^2 > 0; \quad \frac{df_1}{dT^2} > 0. \quad (9.11)$$

Первое неравенство очевидно; рассмотрим второе. Интенсивность скоростей деформаций сдвига ползучести (см. § 3):

$$H^n = 2B(t)f_1(T^2)T,$$

отсюда

$$\frac{dH^n}{dT} = 2B(t) \left[ f_1(T^2) + 2T^2 \frac{df_1}{dT^2} \right]$$

или

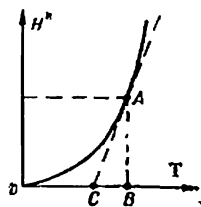
$$\frac{df_1}{dT^2} = \frac{1}{4B(t)T^2} \left( \frac{dH^n}{dT} - \frac{H^n}{T} \right). \quad (9.12)$$

Так как скорость ползучести резко возрастает с увеличением напряжения, то кривая зависимости интенсивности скоростей деформаций сдвига  $H^n$  от интенсивности касательных напряжений  $T$  обращена вогнутой вверх (фиг. 19), следовательно:

$$\frac{dH^n}{dT} - \frac{H^n}{T} = \frac{AB}{BC} - \frac{AB}{BO} > 0.$$

Таким образом, величина внутри квадратной скобки в (9.10) положительна и

$$\frac{dP}{d\tau} < 0. \quad (9.13)$$



Фиг. 19.

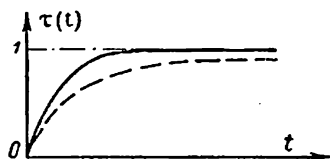
Итак,  $P(\tau)$  — монотонно убывающая функция, положительная в интервале  $0 \leq \tau < 1$  и обращающаяся в нуль первого порядка при  $\tau = 1$ . Поэтому при  $\tau = 1$  интеграл в (9.07) расходится. Далее, функция  $\Omega(t)$  монотонно возрастает со временем, стремясь к бесконечности по линейному закону при  $t \rightarrow \infty$  (фиг. 6). Следовательно, уравнение (9.07) определяет  $\tau(t)$  как монотонно возрастающую функцию времени, асимптотически приближающуюся к значению  $\tau = 1$  при  $t \rightarrow \infty$  (сплошная линия на фиг. 20). Согласно полученному решению, состояние ползучести с течением времени меняется от начального упругого к состоянию установившейся ползучести,

Для простейших задач найденное решение является точным. В случае степенной зависимости  $f_1(T^2) = T^{m-1}$  и тогда

$$P(\tau) = -\frac{2}{m+1} \frac{d}{d\tau} \int \int_V T^{m+1} dV. \quad (9.14)$$

Если  $m$  — четное число, то  $P(\tau)$  — полином степени  $m$ .

Аналогичным методом могут быть изучены задачи, в которых фигурирует условие статической эквивалентности (напри-



Фиг. 20.

мер, задачи кручения, изгиба и т. д.). Ниже мы рассмотрим ряд приложений развитого здесь метода.

#### II. О вычислениях.

Остановимся кратко на вычислительной стороне вопроса. Обозначим интеграл в правой части (9.07) через  $J(\tau)$ . При четном  $m$  интеграл  $J(\tau)$  берется, однако проще его находить численно, строя по способу Эйлера (см. [21], т. 2) интегральную кривую уравнения

$$\frac{dJ}{d\tau} = \frac{1}{P(\tau)} \quad (9.15)$$

при начальном условии

$$J(0) = 0. \quad (9.16)$$

Во многих частных задачах  $P(\tau)$  — полином степени  $m$  при любом целом  $m$ . Тогда, построив кривые  $\tau = \tau(\Omega)$  для различных целых  $m$ , мы можем кривую для дробного  $m$  найти интерполированием. Непосредственное построение кривой  $\tau = \tau(\Omega)$  при дробном  $m$  можно провести, например, так: разбиваем интервал  $0 \leq \tau \leq 1$  на некоторое число  $l$  равных отрезков длины  $\Delta$  сечениями  $\tau_k = k\Delta$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots, l$ .

Интегралы  $P(\tau_k)$  находим по тому или иному способу численно. Кривая  $\tau = \tau(\Omega)$  строится, далее, по способу Эйлера.

III. Замечание о применении аналогичного метода в теории старения. Если исходить из уравнений теории старения (§ 3), то вместо вариационного прин-

цпа (9.01) будет справедлив вариационный принцип [см. [1], § 70]:

$$\delta \int \int \int_V [\Omega(t) \Lambda_1 + \Pi] dV = 0. \quad (9.17)$$

Воспользуемся здесь той же схемой построения приближенного решения (9.02); тогда уравнение (9.17) принимает вид:

$$\Omega(t) \frac{d\bar{\Lambda}_1}{d\tau} + \frac{d\bar{\Pi}}{d\tau} = 0. \quad (9.18)$$

Начальное состояние  $\sigma'_x, \sigma'_y, \dots, \tau'_{zx}$  удовлетворяет уравнению Кастильяно  $\delta\bar{\Pi} = 0$ ; если искать решение этого уравнения в форме (9.02), то получится уравнение для  $\tau(\tau)$  [см. (9.01)]:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\Pi}}{d\tau} = & 2\tau \int \int \int_V \left( \frac{3}{2} k \tilde{\sigma}^2 + \frac{1}{2G} \tilde{T}^2 \right) dV + \\ & + 2 \int \int \int_V \left[ \frac{3}{2} k \sigma' \tilde{\sigma} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{12G} (\sigma'_x - \sigma'_y) (\tilde{\sigma}_x - \tilde{\sigma}_y) + \dots \right] dV = 0, \end{aligned}$$

очевидное решение которого есть  $\tau = 0$ . Следовательно:

$$\begin{aligned} \int \int \int_V \left[ \frac{3}{2} k \sigma' \tilde{\sigma} + \right. \\ \left. + \frac{1}{12G} (\sigma'_x - \sigma'_y) (\tilde{\sigma}_x - \tilde{\sigma}_y) + \dots \right] dV = 0. \quad (9.19) \end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{d\bar{\Pi}}{d\tau} = \tau \frac{d^2\bar{\Pi}}{d\tau^2}. \quad (9.20)$$

Если теперь воспользоваться введенным выше обозначением (9.08), то уравнение (9.18) получает вид:

$$\Omega(t) = \frac{d^2\bar{\Pi}}{d\tau^2} \frac{\tau}{P(\tau)}. \quad (9.21)$$

По этому решению  $\tau(t)$  монотонно возрастает от значения  $\tau=0$  при  $t=0$  к значению  $\tau=1$  при  $t \rightarrow \infty$ . Таким образом, качественно картина та же, что и раньше. Однако, по решению (9.21) функция  $\tau(t)$  стремится к предельному значению более медленно, чем по решению (9.07); на фиг. 20 кривая  $\tau(t)$  по (9.21) показана пунктиром.

## § 10. Приближенное решение релаксационных задач

1. Общее решение. Пусть на части поверхности тела  $S_2$  заданы фиксированные смещения, а на остальной части  $S_1$  напряжения равны нулю; объемные силы также полагаем равными нулю. В начальный момент времени  $t=0$  мы имеем упругое состояние  $\sigma'_x, \sigma'_y, \dots, \tau'_{zx}$ . Вследствие ползучести напряжения с течением времени уменьшаются по величине, стремясь к нулю. Ищем приближенное решение задачи в виде:

$$\sigma_x = \rho(t) \sigma'_x; \quad \sigma_y = \rho(t) \sigma'_y; \quad \dots; \quad \tau_{zx} = \rho(t) \tau'_{zx}, \quad (10.01)$$

где  $\rho(t)$  — произвольная функция времени. Так как  $\sigma'_x, \sigma'_y, \dots, \tau'_{zx}$  удовлетворяют однородным дифференциальным уравнениям равновесия, то  $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{zx}$  также удовлетворяют им; по той же причине условия равновесия (4.02) на части поверхности  $S_1$  удовлетворяются. Так как  $\sigma'_x, \sigma'_y, \dots, \tau'_{zx}$  известны, то, внося (10.01) в выражения для  $\bar{\Pi}$  и  $\bar{\Lambda}_1$ , получаем, что  $\bar{\Pi}$  и  $\bar{\Lambda}_1$  являются функциями одного  $\rho$ , т. е.  $\bar{\Pi} = \bar{\Pi}(\rho)$ ,  $\bar{\Lambda}_1 = \bar{\Lambda}_1(\rho)$ . Тогда условие стационарности дополнительной мощности деформации тела (4.13) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left[ B(t) \bar{\Lambda}_1(\rho) + \frac{\partial \bar{\Pi}(\rho)}{\partial t} \right] = 0,$$

откуда вытекает дифференциальное уравнение для  $\rho(t)$ :

$$B(t) \frac{d\bar{\Lambda}_1}{d\rho} + \frac{d^2 \bar{\Pi}}{d\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = 0. \quad (10.02)$$

В начальный момент времени мы имеем упругое состояние, следовательно:

$$\text{при } t=0 \quad \rho=1. \quad (10.03)$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{d^2 \bar{\Pi}}{d\rho^2} = 2\bar{\Pi}' > 0$$

и от  $\rho$  не зависит. Интегрируя теперь уравнение (10.02), находим:

$$\Omega(t) = -\frac{d^2 \bar{\Pi}}{d\rho^2} \int_1^\rho \frac{d\rho}{\frac{d\bar{\Lambda}_1}{d\rho}}. \quad (10.04)$$

При  $\rho > 0$  мы имеем:

$$\frac{d\bar{\Lambda}_1}{d\rho} = 2\rho \int \int_V f_1(\rho^2 T'^2) T'^2 dV > 0. \quad (10.05)$$

Напомним, что  $T'$  — интенсивность касательных напряжений для упругого состояния. Остановимся на степенной зависимости  $f_1(T'^2) = T'^{m-1}$ , тогда

$$\frac{d\bar{\Lambda}_1}{d\rho} = 2\rho^m \int \int_V T'^{m+1} dV.$$

Выполняя теперь в (10.04) интегрирование, находим:

$$t^* = \frac{1}{m-1} (\rho^{1-m} - 1), \quad (10.06)$$

где введено безразмерное время

$$t^* = x \Omega(t), \quad (10.07)$$

причем

$$x = \int \int_V T'^{m+1} dV \left( \int \int_V \Pi' dV \right)^{-1} > 0. \quad (10.08)$$

Так как  $t^*$  — монотонно возрастающая функция  $t$ , то с течением времени  $\rho(t)$  уменьшается, стремясь при  $t \rightarrow \infty$  к нулю. Уравнение (10.06) формально совпадает с рассмотренным в первой главе уравнением релаксации напряжения в стержне (2.09). Это объясняется тем, что по найденному решению (10.06) кривая релаксации при фиксированном  $m$  вычисляется раз навсегда для тел любой формы; для каждой

конкретной задачи меняется лишь отсчет по оси времен (в зависимости от значения  $\chi$ ). Кривые релаксации для целых  $m$  приведены на фиг. 8. Значения  $\rho(t)$  для нецелых  $m$  можно определять интерполированием или непосредственно строить по уравнению (10.06), при этом коэффициент  $\chi$  находится по одному из способов численного интегрирования. Для упомянутой задачи о релаксации напряжений в растянутом стержне (§ 2) мы имеем:

$$\dot{\sigma}_x = E\epsilon_{x0}; \quad \chi = 2E3 \frac{m+1}{2} \sigma_x^{m-1}, \quad (10.09)$$

где  $\epsilon_{x0}$  — фиксированное относительное удлинение.

Решение (10.01) для простейших задач является точным; в более сложных задачах оно должно рассматриваться как первое приближение (обычно достаточное для приложений), т. к. по этому решению распределение напряжений в любой момент времени подобно начальному  $\sigma'_x, \sigma'_y, \dots, \tau'_{zx}$ . При дальнейшем уточнении решения (если оно необходимо) целесообразно основываться на найденном первом приближении.

II. Замечание о приложении теоремы энергии. Дифференциальное уравнение релаксации нетрудно получить с помощью теоремы энергии (§ 8), которая в данной задаче при степенной зависимости формулируется в виде:

$$(m+1)\bar{A} + \frac{d\bar{\Pi}}{dt} = 0.$$

Так как

$$(m+1)\bar{A} = 2B(t)\rho^{m+1} \int \int_V T^{m+1} dV;$$

$$\frac{d\bar{\Pi}}{dt} = 2\rho \frac{d\rho}{dt} \int \int_V \Pi' dV,$$

то мы приходим к прежнему дифференциальному уравнению.



## ГЛАВА IV

### ПРОСТЕЙШИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ

В этой главе мы рассмотрим несколько простейших осесимметричных задач теории ползучести. В отношении важной задачи о ползучести вращающегося диска мы ограничимся кратким замечанием. Упругое состояние вращающихся дисков изучено очень детально. Задачу о пластической деформации дисков рассматривали Соколовский [29] и Работнов [19]. Ползучести дисков (установившейся и не установившейся) посвящены работы Бейли [27], Одквиста [37], Содерберга [41], Попова [38], Филиппова [25] и др. Заметим, что не установившаяся ползучесть вращающихся дисков в случае основной задачи (см. § 4) проще всего может быть рассмотрена по общему методу, изложенному в § 9. При этом установившееся состояние можно рассчитать, следуя упомянутым работам Соколовского [29] и Попова [38].

#### § 11. Полый цилиндр под действием внутреннего давления

1. Основные положения. Поставленная задача встречается во многих технических вопросах. Пусть  $r, \varphi, z$  — цилиндрические координаты,  $2a, 2b$  — внутренний и наружный диаметры цилиндра,  $v$  — скорость радиального перемещения. Напряжения  $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z$  в силу осевой симметрии являются главными. Для тонкостенного цилиндрического сосуда с донышками, испытывающего внутреннее давление  $p$ , ползучесть в осевом направлении отсутствует (см. § 3). Ниже мы будем рассматривать задачу о ползучести толстостенного цилиндрического сосуда с донцами; примем, для простоты, что и

в этой задаче ползучесть в осевом направлении отсутствует, т. е.

$$\xi_z = 0. \quad (11.01)$$

Это допущение не является существенным и может быть снято.

Напряжения  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$  должны удовлетворять дифференциальному уравнению равновесия

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\varphi = 0 \quad (11.02)$$

и граничным условиям

$$\text{при } r=a \quad \sigma_r = -p; \quad \text{при } r=b \quad \sigma_r = 0. \quad (11.03)$$

II. Начальное упругое состояние описывается известными формулами Ламе:

$$\sigma'_r = s' \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right); \quad \sigma'_\varphi = s' \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right); \quad \sigma'_z = s', \quad (11.04)$$

где положено

$$s' = \frac{p a^2}{b^2 - a^2}.$$

Нетрудно найти, что

$$T' = s' \left( \frac{b}{r} \right)^2. \quad (11.05)$$

Суммируя  $\sigma'_z$ , легко получаем, что по оси трубы действует растягивающая сила  $p \cdot \pi a^2$ .

III. Состояние установившейся ползучести. Так как деформации ползучести не связаны с изменениями объема, то по (11.01) получаем (штрихи опускаем):

$$\xi_r + \xi_\varphi = 0,$$

но

$$\xi_r = \frac{dv}{dr}, \quad \xi_\varphi = \frac{v}{r}.$$

Следовательно:

$$\frac{dv}{dr} + \frac{v}{r} = 0,$$

откуда

$$v = \frac{C_1}{r},$$

где  $C_1$  — произвольная постоянная. Интенсивность скоростей деформаций сдвига

$$H'' = 2 \frac{C_1}{r^2}. \quad (11.06)$$

Далее, из условия  $\xi_z = 0$  и соотношений установившейся ползучести вытекает, что  $\sigma_z - \sigma = 0$ , отсюда

$$\sigma_z = \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_\varphi). \quad (11.07)$$

Теперь нетрудно найти, что (в случае внутреннего давления  $\sigma_\varphi > 0$ ,  $\sigma_r \leq 0$ ,  $C_1 > 0$ ):

$$T'' = \frac{1}{2} (\sigma_\varphi'' - \sigma_r''). \quad (11.08)$$

Интенсивности  $T''$  и  $H''$  связаны зависимостью (§ 6):

$$T'' = 2B^*(\infty) H''^\mu = 2^{1+\mu} B^*(\infty) \left( \frac{C_1}{r^2} \right)^\mu. \quad (11.09)$$

Исключая с помощью последних соотношений разность  $\sigma_\varphi'' - \sigma_r''$  из дифференциального уравнения равновесия, получаем:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = 2^{2+\mu} B^*(\infty) \frac{1}{r} \left( \frac{C_1}{r^2} \right)^\mu,$$

откуда

$$\sigma_r = - \frac{2^{1+\mu}}{\mu} B^*(\infty) \left( \frac{C_1}{r^2} \right)^\mu + C_2.$$

Определяя произвольные постоянные  $C_1$ ,  $C_2$  по граничным условиям (11.03), находим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r'' &= s'' \left[ 1 - \left( \frac{b}{r} \right)^{2\mu} \right]; & \sigma_\varphi'' &= s'' \left[ 1 + (2\mu - 1) \left( \frac{b}{r} \right)^{2\mu} \right]; \\ \sigma_z'' &= s'' \left[ 1 + (\mu - 1) \left( \frac{b}{r} \right)^{2\mu} \right], \end{aligned} \right\} \quad (11.10)$$

где введено обозначение

$$s'' = \frac{\rho a^{2\mu}}{b^{2\mu} - a^{2\mu}}.$$

Нетрудно, наконец, найти, что

$$T'' = \mu s'' \left( \frac{b}{r} \right)^{2\mu}. \quad (11.11)$$

Суммируя  $\sigma_z''$ , получаем, как и выше, что

$$2\pi \int_a^b \sigma_z'' r dr = p\pi a^2, \quad (11.12)$$

что, между прочим, оправдывает допущение (11.01).

IV. Не установившаяся ползучесть рассматривается по общему методу, изложенному в предыдущей главе. Напряжения представляются в форме:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_r' + \tau(t)(\sigma_r'' - \sigma_r'); & \sigma_\varphi &= \sigma_\varphi' + \tau(t)(\sigma_\varphi'' - \sigma_\varphi'); \\ \sigma_z &= \sigma_z' + \tau(t)(\sigma_z'' - \sigma_z'). \end{aligned} \right\} \quad (11.13)$$

Исходя из этих формул, нетрудно вычислить, что

$$T = T' + \tau(t)(T'' - T'). \quad (11.14)$$

Сумма напряжений  $\sigma_z$  попрежнему равна  $p\pi a^2$ .

Функция  $\tau(t)$  определяется соотношением (9.07); в данной задаче

$$P(\tau) = -4\pi \int_a^b T''(T'' - T') r dr. \quad (11.15)$$

При целом  $m$   $P(\tau)$  есть полином степени  $m$ . Вычисление интеграла  $J(\tau)$  проводится обычным способом (см. § 9). Находим, далее

$$\frac{d^2 \bar{\Pi}}{d\tau^2} = 2\pi \int_a^b \left[ 3k(\sigma'' - \sigma')^2 + \frac{1}{G}(T'' - T')^2 \right] r dr,$$

где интегрирование легко выполняется; окончательных формул мы не приводим. Найдя кривые  $\tau = \tau(\Omega)$  для различных целых  $m$ , мы можем кривую для дробного  $m$  построить интерполированием. Непосредственное построение кривой  $\tau = \tau(\Omega)$  при дробном  $m$  осуществимо по способу, указанному § 9. Таким образом, решение не установившейся задачи связано с простыми, хотя, быть может, и несколько громоздкими вычислениями. Следует заметить, что эти вычисления необходимо провести раз навсегда для данных значений  $\frac{b}{a}$  и  $m$ ; можно

поэтому построить графики, пользование которыми весьма просто.

V. Случай тонкостенной трубы. В случае относительно тонкостенной трубы вычисление можно провести в общем виде. Введем безразмерную переменную  $x$  посредством соотношения  $r = c(1+x)$ , где  $2c = a+b$ ; очевидно, что  $-\Delta \leq x \leq \Delta$ , где  $\Delta = \frac{b-a}{b+a}$ . Для относительно тонкостенных труб величина  $\Delta \ll 1$ , например,  $\Delta < 0,1$ . Начальное упругое состояние трубы описывается формулами Ламе (11.04), установившееся состояние — формулами (11.10). Следуя общему методу, решение задачи о неустановившейся ползучести ищем в виде (11.13). Разложим разность  $\sigma_r'' - \sigma_r'$  в ряд по степеням  $x$ , отбросив в разложении члены порядка выше второго; выполнив необходимые выкладки, получим, что

$$\sigma_r'' - \sigma_r' \approx \frac{p}{2\Delta} (\mu - 1)(\Delta^2 - x^2). \quad (11.16)$$

Разность  $\sigma_\varphi'' - \sigma_\varphi'$  мы найдем из дифференциального уравнения равновесия (11.02), внося в него значения  $\sigma_r'' - \sigma_r'$  согласно (11.16). Не останавливаясь на простых выкладках, приводим результаты:

$$\sigma_\varphi'' - \sigma_\varphi' \approx \frac{p(\mu - 1)}{2\Delta} (\Delta^2 - 3x^2 - 2x).$$

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_r' + \tau(t) \frac{p(\mu - 1)}{2\Delta} (\Delta^2 - x^2); \\ \sigma_\varphi &= \sigma_\varphi' + \tau(t) \frac{p(\mu - 1)}{2\Delta} (\Delta^2 - 3x^2 - 2x). \end{aligned} \right\} \quad (11.17)$$

Интенсивность касательных напряжений

$$T = \frac{pk_1}{(1+x)^2} + \tau(t) \frac{p(1-\mu)}{2\Delta} x(1+x), \quad (11.18)$$

где

$$k_1 = \frac{(1-\Delta^2)^2}{4\Delta} \approx \frac{1}{4\Delta}.$$

Функцию  $\tau(t)$  определим, как всегда, из условия стационарности дополнительной мощности  $\bar{A} + \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t}$ . Примем, для простоты, что материал несжимаем, т. е.  $k=0$  (см. § 3), тогда вариационное уравнение (9.01) в рассматриваемой нами задаче принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\Delta}^{\Delta} \left[ \frac{2B(t)}{m+1} T^{m+1} + \frac{1}{2G} \frac{dT^2}{dt} \right] (1+x) dx = 0.$$

или

$$\frac{p(1-\nu)}{3G} \Delta^2 \frac{d\tau}{dt} + 2B(t) \int_{-\Delta}^{\Delta} T^m x (1+x)^2 dx = 0, \quad (11.19)$$

где с точностью до  $\Delta^2$  по сравнению с единицей положено

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} x^2 (1+x)^3 dx = \frac{2}{3} \Delta^3. \text{ Рассмотрим интеграл}$$

$$\begin{aligned} P_1(\tau) &= \int_{-\Delta}^{\Delta} T^m x (1+x)^2 dx = \\ &= \left( \frac{p}{4\Delta} \right)^m \int_{-\Delta}^{\Delta} \left[ 1 + \frac{2(m-1)}{m} x (1+x)^3 \tau \right]^m \frac{x dx}{(x+1)^{2m-2}}, \end{aligned}$$

отличающийся, очевидно, лишь постоянным множителем от  $P(\tau)$ . Второе слагаемое в квадратной скобке при  $m \ll 10$  меньше  $1/4$ ; разворачивая квадратную скобку в строку бинома Ньютона и интегрируя почленно получающийся бесконечный ряд, находим:

$$\begin{aligned} P_1(\tau) &= \left( \frac{p}{4\Delta} \right)^m \left\{ \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{x dx}{(x+1)^{2m-2}} + 2(m-1)\tau \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{x^2 dx}{(x+1)^{2m-5}} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{(m-1)^2}{m} \tau^2 \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{x^3 dx}{(x+1)^{2m-8}} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что с точностью до  $\Delta^2$  по сравнению с единицей

$$\int_{\Delta} x^n (1+x)^n dx = \begin{cases} \frac{2x}{n+2} \Delta^{n+2} & n \text{ нечетное} \\ \frac{2}{n+1} \Delta^{n+1} & n \text{ четное,} \end{cases} \quad (11.20)$$

где  $x$  — некоторое число, а  $n > 0$  — целое число.

Ограничиваясь в разложении  $P_1(\tau)$  выписанными слагаемыми, получаем с помощью (11.20):

$$P_1(\tau) = -\left(\frac{p}{4\Delta}\right)^m \frac{4}{3} (m-1) \Delta^3 \times \\ \times \left[1 - \tau - \frac{6}{5} \frac{(m-1)^2}{m} (4-m) \Delta^2 \tau^2\right].$$

Пусть

$$\left| \frac{6}{5} \frac{(m-1)^2}{m} (4-m) \Delta^2 \right| \ll 1.$$

Это условие выполняется, например, при  $m < 5$ , если  $\Delta \ll 0,1$ ; тогда

$$P_1(\tau) = -\left(\frac{p}{4\Delta}\right)^m \frac{4}{3} (m-1) \Delta^3 (1-\tau). \quad (11.21)$$

Внося это значение в (11.19), получаем дифференциальное уравнение для  $\tau(t)$ :

$$\frac{d\tau}{dt} - \beta_1 B(t)(1-\tau) = 0, \quad (11.22)$$

где введено обозначение

$$\beta_1 = 2mG \left(\frac{p}{4\Delta}\right)^{m-1}.$$

Интегралом дифференциального уравнения (11.22), удовлетворяющим нулевому начальному условию

$$\text{при } t=0 \quad \tau=0,$$

является функция

$$\tau = 1 - e^{-t_{1*}}, \quad (11.23)$$

где введено безразмерное время

$$t_{1*} = \beta_1 Q(t). \quad (11.24)$$

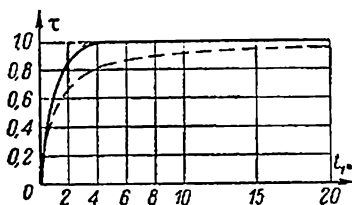
Зависимость (11.23) показана на фиг. 21 сплошной линией. Решение этой же задачи по теории старения [4] приводит к уравнению

$$\tau - \beta_1 \Omega(t) (1 - \tau) = 0,$$

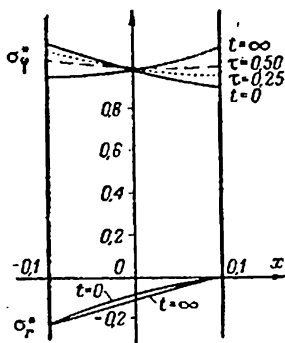
откуда

$$\tau = \frac{t_{1*}}{t_{1*} + 1}. \quad (11.25)$$

Эта кривая нанесена на фиг. 21 пунктиром. На фиг. 22 показано распределение напряжений  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$ , подсчитанное по формулам (11.17), для различных моментов времени, характеризующихся значениями  $\tau = \tau(t)$ . По оси ординат отложены



Фиг. 21.



Фиг. 22.

безразмерные напряжения  $\sigma_r^* = \sigma_r / \sigma_{\varphi, \text{ ср.}}$ ,  $\sigma_\varphi^* = \sigma_\varphi / \sigma_{\varphi, \text{ ср.}}$ , где  $\sigma_{\varphi, \text{ ср.}} = \frac{pa}{b-a}$  есть среднее тангенциальное напряжение в стенке трубы. Принято, что  $\Delta = 0,1$ , а  $m = 4,5$ . С течением времени максимум  $\sigma_\varphi$  перемещается с внутренней стенки трубы (при  $t = 0$ ) на внешнюю.

## § 12. Сферический сосуд под действием внутреннего давления

I. Основные положения. Рассмотрим задачу о ползучести сферического сосуда, испытывающего внутреннее давление  $p$ . Пусть  $r$ ,  $\varphi$ ,  $\chi$  — сферические координаты,  $2a$ ,  $2b$  — внутренний и наружный диаметры сосуда,  $v$  — ско-



рость радиального смещения. Напряжения  $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_\chi$  вследствие симметрии являются главными напряжениями, причем  $\sigma_\varphi = \sigma_\chi$  и  $3\sigma = \sigma_r + 2\sigma_\varphi$ . Интенсивность касательных напряжений ( $\sigma_\varphi > 0, \sigma_r \leq 0$ ):

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_\varphi - \sigma_r). \quad (12.01)$$

Напряжения  $\sigma_r, \sigma_\varphi$  должны удовлетворять дифференциальному уравнению равновесия

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + 2(\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0 \quad (12.02)$$

и граничным условиям

$$\text{при } r=a \quad \sigma_r = -p; \quad \text{при } r=b \quad \sigma_r = 0. \quad (12.03)$$

II. Начальное упругое состояние описывается хорошо известными формулами теории упругости

$$\sigma'_r = s'_1 \left[ 1 - \left( \frac{b}{r} \right)^3 \right]; \quad \sigma'_\varphi = s'_1 \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{b}{r} \right)^3 \right], \quad (12.04)$$

где положено

$$s'_1 = \frac{pa^3}{b^3 - a^3}.$$

Интенсивность касательных напряжений

$$T' = \frac{\sqrt{3}}{2} s'_1 \left( \frac{b}{r} \right)^3. \quad (12.05)$$

III. Состояние установившейся ползучести. Из условия несжимаемости

$$\xi_r + 2\xi_\varphi = 0$$

и известных соотношений

$$\xi_r = \frac{dv}{dr}; \quad \xi_\varphi = \xi_\chi = \frac{v}{r}$$

получаем

$$v = \frac{C_1}{r^2}, \quad (12.06)$$

где  $C_1$  — произвольная постоянная. Интенсивность скоростей деформаций сдвига равна

$$H'' = \frac{2}{\sqrt{3}} (\xi_\varphi - \xi_r) = 2\sqrt{3} \frac{C_1}{r^3}. \quad (12.07)$$

Согласно зависимости (6.07) получаем:

$$T'' = 2B^*(\infty) \left( \frac{2\sqrt{3}C_1}{r^3} \right)^\mu.$$

Исключая с помощью (12.01) разность  $\sigma_\varphi - \sigma_r$  в дифференциальном уравнении (12.02) и интегрируя его, находим:

$$\sigma_r = -\frac{4\sqrt{3}B^*(\infty)}{3\mu} \left( \frac{2\sqrt{3}C_1}{r^3} \right)^\mu + C_2.$$

Определяя произвольные постоянные  $C_1, C_2$  из граничных условий (12.03), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r'' &= s_1'' \left[ 1 - \left( \frac{b}{r} \right)^{3\mu} \right]; \\ \sigma_\varphi'' &= \sigma_\chi'' = s_1'' \left[ 1 + \frac{3\mu-2}{2} \left( \frac{b}{r} \right)^{3\mu} \right], \end{aligned} \right\} \quad (12.08)$$

где положено

$$s_1'' = \frac{pa^{3\mu}}{b^{3\mu} - a^{3\mu}}.$$

Интенсивность касательных напряжений

$$T'' = \frac{\sqrt{3}}{2} s_1'' \left( \frac{b}{r} \right)^{3\mu}. \quad (12.09)$$

IV. Не установившаяся ползучесть. Ищем решение в форме:

$$\sigma_r = \sigma_r' + \tau(t)(\sigma_r'' - \sigma_r'); \quad \sigma_\varphi = \sigma_\chi = \sigma_\varphi' + \tau(t)(\sigma_\varphi'' - \sigma_\varphi'). \quad (12.10)$$

Нетрудно видеть, что

$$T = T' + \tau(t)(T'' - T');$$

$$P(\tau) = -8\pi \int_a^b T''(T'' - T') r^2 dr;$$

$$\frac{d^2 \bar{\Pi}}{d\tau^2} = 4\pi \int_a^b \left[ 3k(\sigma'' - \sigma')^2 + \frac{1}{G}(T'' - T')^2 \right] r^2 dr.$$

Вычисление кривой  $\tau = \tau(\Omega)$  проводится по общей схеме (§ 9).

V. Неустановившаяся ползучесть тонкостенного сферического сосуда может быть рассмотрена подобно тому, как это было сделано для тонкостенной трубы. Введем безразмерную переменную  $x$  посредством соотношения  $r = c(1+x)$ , где  $2c = a+b$ , причем, как и ранее,  $-\Delta \leq x \leq \Delta$ , где  $\Delta = \frac{b-a}{b+a}$ . Для тонкостенного сосуда  $\Delta \ll 1$ . Решение неустановившейся задачи ищем в обычной форме (12.10). Разлагая  $\sigma_r'' - \sigma_r'$  в ряд по степеням  $x$  и отбрасывая в разложении члены порядка выше второго, получаем:

$$\sigma_r'' - \sigma_r' = \frac{3p}{4\Delta} (\mu - 1) (\Delta^2 - x^2).$$

Разность  $\sigma_\varphi'' - \sigma_\varphi'$  находим из дифференциального уравнения равновесия (12.02), внося в него полученное выражение для  $\sigma_r'' - \sigma_r'$ . Тогда исходные формулы (12.10) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_r' + \tau(t) \frac{3p}{4\Delta} (\mu - 1) (\Delta^2 - x^2), \\ \sigma_\varphi &= \sigma_\varphi' + \tau(t) \frac{3p}{4\Delta} (\mu - 1) (\Delta^2 - 2x^2 - x). \end{aligned} \right\} \quad (12.11)$$

Интенсивность касательных напряжений

$$T = \frac{pk_2}{(1+x)^3} + \tau(t) \frac{3p}{4\Delta} (1-\mu) \sqrt{\frac{2}{3}} x(1+x), \quad (12.12)$$

где

$$k_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(1-\Delta^2)^3}{6\Delta} \approx \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{6\Delta}.$$

Функция  $\tau(t)$  определяется из условия стационарности дополнительной мощности, которое в рассматриваемой задаче для несжимаемого материала ( $k=0$ ) таково:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\Delta}^{\Delta} \left[ \frac{2B(t)}{m+1} T^{m+1} + \frac{1}{2G} \frac{dT^2}{dt} \right] (1+x)^2 dx = 0$$

или

$$\frac{p(1-\mu)}{\sqrt{6}G} \Delta^2 \frac{d\tau}{dt} + 2B(t) \int_{-\Delta}^{\Delta} T^m x (1+x)^3 dx = 0. \quad (12.13)$$

Подобно предыдущему находим:

$$P_2(\tau) = \int_{-\Delta}^{\Delta} T^m x (1+x)^3 dx = -\left(\frac{p}{6\Delta} \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^m 2(m-1)\Delta^3 \times \\ \times \left[1 - \tau - \frac{9}{10} \frac{(m-1)^2}{m} (11-3m)\Delta^2 \tau^2\right].$$

Пусть

$$\left| \frac{9}{10} \frac{(m-1)^2}{m} (11-3m)\Delta^2 \right| \ll 1,$$

тогда

$$P_2(\tau) = -\left(\frac{p}{6\Delta} \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^m 2(m-1)\Delta^3 (1-\tau). \quad (12.14)$$

Теперь из (12.13) получаем дифференциальное уравнение для  $\tau(t)$ :

$$\frac{d\tau}{dt} - \beta_2 B(t) (1-\tau) = 0,$$

где обозначено

$$\beta_2 = 2mG \left(\frac{p}{6\Delta} \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{m-1}. \quad (12.15)$$

Искомое решение

$$\tau = 1 - e^{-t_{2*}}, \quad (12.16)$$

где введено безразмерное время

$$t_{2*} = \beta_2 \Omega(t). \quad (12.17)$$

Решение этой же задачи по теории старения имеет вид:

$$\tau = \frac{t_{2*}}{t_{2*} + 1}. \quad (12.18)$$

Таким образом, кривые, показанные на фиг. 21, относятся и к задаче о неустановившейся ползучести тонкостенного сферического сосуда при условии замены  $t_{1*}$  величинами  $t_{2*}$ .

### § 13. О концентрации напряжений у отверстий

С помощью найденных выше решений можно рассмотреть простейшие задачи о концентрации напряжений, вызванной цилиндрическим отверстием или сферической полостью в поле

равномерного всестороннего растяжения (сжатия). Изменение напряженного состояния, вызванное отверстием, следует оценивать в теории ползучести по значениям интенсивностей касательных напряжений у отверстия и на большом удалении от него.

1. Концентрация напряжений у цилиндрического отверстия в поле равномерного всестороннего растяжения. Эта задача характеризуется предельными условиями:

$$\text{при } r=a \quad \sigma_r=0; \quad (13.01)$$

$$\text{при } r=\infty \quad \sigma_r=\sigma_\varphi=\sigma_z=q, \quad (13.02)$$

где  $q$  — заданная величина.

*Начальное упругое состояние* описывается формулами:

$$\sigma_r=q\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]; \quad \sigma_\varphi=q\left[1+\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]; \quad \sigma_z=q. \quad (13.03)$$

Нетрудно найти, что

$$T'_a=q; \quad T'_\infty=0, \quad (13.04)$$

где  $T'_a$  и  $T'_\infty$  означают соответственно интенсивности касательных напряжений на краю отверстия и на бесконечности.

*Состояние установившейся ползучести* описывается зависимостями:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= q\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^{2\mu}\right]; \quad \sigma_\varphi = q\left[1+(2\mu-1)\left(\frac{a}{r}\right)^{2\mu}\right]; \\ \sigma_z &= q\left[1+(\mu-1)\left(\frac{a}{r}\right)^{2\mu}\right], \end{aligned} \quad (13.05)$$

которые нетрудно вывести с помощью решений § 11 и приведенных выше предельных условий. При этом

$$T''_a=\mu q; \quad T''_\infty=0. \quad (13.06)$$

Неустановившаяся ползучесть может быть рассмотрена обычным методом (§ 9) при  $m < 2$ ; при  $m \geq 2$  интеграл

$\frac{d^2 \bar{\Pi}}{d\tau^2}$  расходится.

II. Концентрация напряжений у сферической полости. Задача о концентрации напряжений у сферической полости в поле равномерного всестороннего растяжения может быть рассмотрена при помощи решений § 12; в этой задаче предельные условия таковы:

$$\begin{aligned} \text{при } r = a \quad \sigma_r &= 0 \\ \text{при } r = \infty \quad \sigma_r &= \sigma_\varphi = \sigma_z = q, \end{aligned} \quad (13.07)$$

где  $q$  — заданная величина.

*Начальное упругое состояние* описывается формулами:

$$\sigma_r = q \left[ 1 - \left( \frac{a}{r} \right)^3 \right]; \quad \sigma_\varphi = \sigma_z = q \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{a}{r} \right)^3 \right]. \quad (13.08)$$

Здесь

$$T'_a = \frac{\sqrt{3}}{2} q; \quad T'_\infty = 0. \quad (13.09)$$

*Состояние установившейся ползучести* характеризуется напряжениями:

$$\sigma_r = q \left[ 1 - \left( \frac{a}{r} \right)^{3\mu} \right]; \quad \sigma_\varphi = \sigma_z = q \left[ 1 + \frac{3\mu - 2}{2} \left( \frac{a}{r} \right)^{3\mu} \right]. \quad (13.10)$$

При этом

$$T''_a = \frac{\sqrt{3}}{2} \mu q; \quad T''_\infty = 0. \quad (13.11)$$

#### § 14. Релаксация напряжений в насаженном кольце

Рассмотрим в качестве примера задачу о релаксации напряжений в кольце ( $2a$ ,  $2b$  — внутренний и внешний диаметры,  $h$  — высота), насаженном на жесткий вал с определенным натягом; пусть начальное давление кольца на вал (при  $t=0$ ) равно  $p$ . С течением времени давление кольца на вал будет уменьшаться вследствие ползучести кольца.

I. Начальное упругое состояние кольца описывается формулами Ламе

$$\sigma'_r = s' \left[ 1 - \left( \frac{b}{r} \right)^2 \right]; \quad \sigma'_\varphi = s' \left[ 1 + \left( \frac{b}{r} \right)^2 \right]; \quad \sigma'_z = 0, \quad (14.01)$$

где  $s'$  имеет прежнее значение (§ 11). Нетрудно видеть, что

$$\sigma' = \frac{2}{3} s'; \quad T' = \frac{s'}{\sqrt{3}} \sqrt{1 + 3\left(\frac{b}{r}\right)^4}. \quad (14.02)$$

II. Релаксация напряжений в кольце, согласно приближенному решению (см. § 10), описывается зависимостями:

$$\sigma_r = \rho(t^*) \sigma'_r; \quad \sigma_\varphi = \rho(t^*) \sigma'_\varphi; \quad \sigma_z = 0, \quad (14.03)$$

где  $t^* = \kappa \Omega(t)$  — безразмерное время. Необходимо вычислить множитель  $\kappa$ . Находим:

$$\begin{aligned} \Pi' &= 2\pi h \int_a^b \left( \frac{3}{2} k s'^2 + \frac{1}{2G} T'^2 \right) r dr = \\ &= \frac{1}{3} \frac{\pi p^2 a^4 h}{b^2 - a^2} \left[ 2k + \frac{1}{2G} + \frac{1}{G} \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right]; \\ \int \int \int_V T'^{m+1} dV &= 2\pi h \left( \frac{s'}{\sqrt{3}} \right)^{m+1} \int_a^b \left[ 1 + 3 \left( \frac{b}{r} \right)^4 \right]^{\frac{m+1}{2}} r dr. \end{aligned}$$

Пусть, например,  $m = 3$ . Тогда ( $\beta \equiv b/a$ ):

$$\kappa = \frac{Es'^2}{3} \frac{1 + 15\beta^2 + 3\beta^4 + 3\beta^6}{3(1-\nu) + 2(1+\nu)\beta^2}.$$

Давление на вал

$$\sigma_{r/r=a} = \rho(t^*) p. \quad (14.04)$$

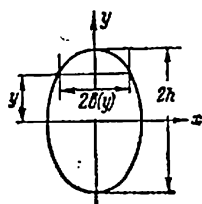
Кривые  $\rho = \rho(t^*)$  показаны на фиг. 8.

## ГЛАВА V

### ИЗГИБ

#### § 15. Чистый изгиб

При рассмотрении этой задачи мы будем придерживаться общей схемы, изложенной в гл. III.



Фиг. 23.

Для простоты предполагаем, что сечение стержня симметрично относительно плоскостей  $xz$ ,  $yz$  (ось  $z$  направлена по оси стержня).

Изгибающий момент действует в плоскости  $yz$  (фиг. 23).

Обозначим через  $2b(y)$  ширину профиля, через  $2h$  — максимальную высоту его.

I. Начальное упругое состояние ( $t = 0$ ). Здесь мы имеем:

$$\sigma'_x = \frac{My}{I}, \quad \left( I = 4 \int_0^h b(y) y^2 dy \right); \quad (15.01)$$

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = \pm \frac{M}{EI}, \quad (15.02)$$

где  $u = u(z)$  — ордината упругой линии балки в момент  $t = 0$ , а  $I$  — момент инерции. Потенциальная энергия единицы длины балки равна

$$\Pi' = \frac{M^2}{2EI} = \frac{EI}{2} \left( \frac{d^2 u}{dz^2} \right)^2. \quad (15.03)$$

II. Состояние установившейся ползучести. Исходим из степенной зависимости

$$\dot{\epsilon}_x = B_1(\infty) \sigma_x^m \quad \text{или} \quad \sigma_x = [B_1(\infty)]^{-1/m} \dot{\epsilon}_x^{1/m}, \quad (15.04)$$



где  $\mu = \frac{1}{m} < 1$ ; в область отрицательных  $y$  напряжение  $\sigma_z$  и скорость деформации  $\dot{\xi}_z$  продолжаются нечетным образом. Из соображений симметрии ясно, что плоские сечения, нормальные к оси стержня до деформации, остаются плоскими и после деформации, поэтому

$$\dot{\xi}_z = k y, \quad (15.05)$$

где через  $k$  обозначена установившаяся скорость изменения кривизны оси стержня. По уравнению равновесия

$$4 \int_0^h z_y b(y) dy = M. \quad (15.06)$$

Внося сюда  $\sigma_z$  и  $\dot{\xi}_z$ , согласно (15.04), (15.06), получаем:

$$|k|^{\frac{1}{m}} [B_1(\infty)]^{-\frac{1}{m}} I_m = \pm M, \quad (15.07)$$

где введено обозначение

$$I_m = 4 \int_0^h b(y) y^{1+\frac{1}{m}} dy. \quad (15.08)$$

Эту величину условимся называть моментом инерции  $I_m$ ; она зависит только от формы сечения и показателя  $m$ ; при  $m=1$  получаем „обычный“ момент инерции  $I$ . Теперь с помощью (15.05) и (15.07) изходим:

$$\sigma_z'' = \frac{M}{I_m} y^{\frac{1}{m}}, \quad (15.09)$$

где двумя штрихами мы отличаем, как и ранее, установившееся состояние. Обозначим через  $v = v(z)$  скорость изменения ординат линии прогибов балки в состоянии установившейся ползучести. Очевидно, что при малых деформациях и прогибах  $k = \frac{d^2 v}{dz^2}$ , следовательно

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = \pm \frac{|M|^{\frac{1}{m}}}{D}, \quad (15.10)$$

где под  $D = [B_1(\infty)]^{-1} I_m^{\frac{1}{m}}$  мы будем понимать жесткость стержня при ползучести. Введем теперь *рассеяние* единицы

длины балки  $L''$  и дополнительное рассеяние (также на единицу длины)  $\Lambda''$ , определив их следующим образом:

$$\delta L'' = M \delta \left( \frac{d^2 v}{dz^2} \right); \quad \delta \Lambda'' = \frac{d^2 v}{dz^2} \delta M, \quad (15.11)$$

где  $\delta$  — знак варьирования. Исключая с помощью (15.10) в первом соотношении  $M$ , а во втором  $\frac{d^2 v}{dz^2}$  и переходя к самим функциям  $L''$  и  $\Lambda''$ , получаем (с точностью до аддитивной постоянной):

$$L'' = \frac{D^{\mu}}{\mu+1} \left| \frac{d^2 v}{dz^2} \right|^{\mu+1}; \quad \Lambda'' = \frac{D^{-1}}{m+1} |M|^{m+1}. \quad (15.12)$$

В дальнейшем эти функции будут играть важную роль, так как для случая нелинейной зависимости (15.04) они заменяют выражения упругой потенциальной энергии (15.03).

III. Неустановившаяся ползучесть при постоянном изгибающем моменте. В этом случае нужно найти точку стационарности дополнительной мощности изгибаемого стержня

$$\delta \Phi \equiv 4\delta \int_0^h b(y) \left( \Lambda + \frac{\partial \Pi}{\partial t} \right) dy = 0 \quad (15.13)$$

при условии постоянства момента внутренних сил (15.06). Но в задаче изгиба от нуля отлично только напряжение  $\sigma_z$ , поэтому

$$\Pi = \frac{1}{2E} \sigma_z^2; \quad \Lambda = \frac{B_1(t)}{m+1} \sigma_z^{m+1}. \quad (15.14)$$

Нетрудно убедиться в том, что уравнение Эйлера этой задачи вариационного исчисления (в силу условия (15.06) мы имеем изопериметрическую задачу) выражает так называемую гипотезу плоских сечений  $\xi_z = \lambda y$ , где параметр  $\lambda$  определяется согласно уравнению равновесия (15.06). Так как необходимо пользоваться полным уравнением ползучести (2.05), то решение задачи неустановившегося изгиба наталкивается на большие математические трудности и может быть достигнуто лишь сложным численным способом. Будем, поэтому,

искать приближенное решение задачи в форме:

$$\sigma_z = \sigma'_z + \tau(t) (\sigma''_z - \sigma'_z), \quad (15.15)$$

где  $\tau(t)$  — подлежащая определению функция времени. Введем безразмерные величины

$$\eta = \frac{y}{h}; \quad \beta(\eta) = \frac{b(y)}{h}; \quad \sigma_z^* = \frac{\sigma_z I}{Mh}; \quad \kappa_1 = \frac{I}{I_m h^{1-\mu}}. \quad (15.16)$$

Заметим, что коэффициент  $\kappa_1$  зависит лишь от формы сечения и показателя  $m$  и всегда меньше единицы; в самом деле:

$$\kappa_1 = \int_0^1 \beta(\eta) \eta^2 d\eta \left( \int_0^1 \beta(\eta) \eta^{1+\mu} d\eta \right)^{-1} < 1,$$

так как  $0 \leq \eta \leq 1$  и  $m > 1$ ;  $\kappa_1 = 1$  только при  $m = 1$ . Таким образом

$$\sigma_z^* = \eta + \tau(t) Y_1, \quad (15.17)$$

где положено

$$Y_1 = \kappa_1 \eta^\mu - \eta. \quad (15.18)$$

Вернемся к основным уравнениям (15.13) и (15.06); уравнение равновесия (15.06), очевидно, удовлетворено, а дополнительная мощность  $\bar{\Phi}$  теперь является функцией лишь переменного  $\tau$ . Условие стационарности  $\bar{\Phi}$  выражается уравнением  $\frac{d\bar{\Phi}}{d\tau} = 0$ , разворачивая которое получаем дифференциальное уравнение для искомой функции  $\tau(t)$ :

$$\left| \frac{Mh}{I} \right|^{m-1} E B_1(t) P_1(\tau) - \Sigma_1 \frac{d\tau}{dt} = 0, \quad (15.19)$$

где положено:

$$\left. \begin{aligned} P_1(\tau) &= - \int_0^1 [\eta + \tau(t) Y_1]^m Y_1 \beta(\eta) d\eta; \\ \Sigma_1 &= \int_0^1 Y_1^2 \beta(\eta) d\eta. \end{aligned} \right\} \quad (15.20)$$

Начальное условие для  $\tau(t)$ :

$$\text{при } t=0 \quad \tau=0. \quad (15.21)$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (15.19) при условии (15.21), получаем:

$$t_1^* = \int_0^{\tau} \frac{d\tau}{P_1(\tau)}, \quad (15.22)$$

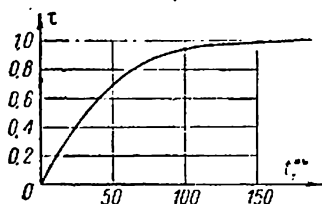
где введено безразмерное время

$$t_1^* = \frac{E\Omega_1(t)}{\Sigma_1} \left| \frac{Mh}{I} \right|^{m-1}. \quad (15.23)$$

Легко видеть, что

$$P_1(1) = 0; \quad \frac{dP_1(\tau)}{d\tau} < 0 \quad (0 \leq \tau \leq 1).$$

В точке  $\tau=1$  функция  $P_1(\tau)$  имеет нуль первого порядка, так что интеграл в (15.22) расходится при  $\tau=1$ . Таким образом, картина неустановившейся ползучести при изгибе аналогична общей картине, рассмотренной в гл. III. При целом  $m$   $P_1(\tau)$  — полином степени  $m$ ; тогда интегрирование в (15.20) легко выполняется.



Фиг. 24.

Кривую  $\tau = \tau(t_1^*)$  проще всего строить численным интегрированием по методу Эйлера (см. § 9). При фиксированном  $m$  для сечения определенной формы (например, прямоугольной) кривая  $\tau = \tau(t_1^*)$  строится раз навсегда. Значения  $\tau$  при дробном  $m$  можно определять интерполированием.

Рассмотрим в качестве примера стержень прямоугольного сечения при  $m=3$ ; тогда  $\mu = \frac{1}{3}$ ,  $\alpha_1 = \frac{2+\mu}{3} = \frac{7}{9}$ . Вычисляя  $P_1(\tau)$ , получаем:

$$P_1(\tau) = \frac{b}{h} \frac{4}{195} (1-\tau) \left( 1 + \frac{4}{33} \tau + \frac{188}{2673} \tau^2 \right).$$

Интегральная кривая  $\tau = \tau(t_1^{**})$ , где  $t_1^{**} = \frac{b}{h} t_1^*$ , построенная по способу Эйлера, показана на фиг. 24.

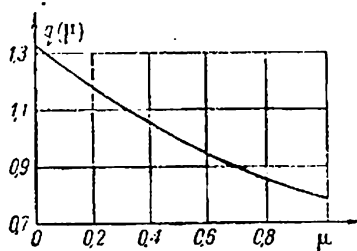
IV. Релаксация. Пусть стержень сохраняет сообщенную ему в начальный момент времени кривизну; выясним, как релаксирует изгибающий момент в стержне. Это нетрудно сделать, если следовать общему методу (§ 10); необходимо лишь вычислить коэффициент  $\chi$ .

В нашем случае:

$$\sigma_z' = \frac{M_0}{I} y;$$

$$T' = \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{M_0}{I} y \right|;$$

$$\Pi' = \frac{1}{2E} \left( \frac{M_0}{I} y \right)^2,$$



Фиг. 25.

где  $M_0$  — начальное значение изгибающего момента. Так, для прямоугольного сечения легко получаем:

$$\chi = \frac{2E}{m+1} \left| \frac{M_0 h}{\sqrt{3} I} \right|^{m-1}. \quad (15.24)$$

Кривые релаксации показаны на фиг. 8.

V. Некоторые формулы. Момент инерции  $I_m$  вычисляется по формуле (15.08). Для прямоугольного сечения  $I_m$  находится легко.

Для круга радиуса  $a$  получаем:

$$I_m = 4a^{3+\mu} \int_0^1 \eta^{1+\mu} \sqrt{1-\eta^2} d\eta.$$

Но

$$\int_0^1 \eta^k \sqrt{1-\eta^2} d\eta = \frac{2^{k-1}}{2+k} \frac{\left[ \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \right]^2}{\Gamma(k+1)},$$

где  $k$  — некоторое число, а  $\Gamma(\ )$  — гамма-функция. Таким образом

$$I_m = \frac{2^{2+\mu}}{3+\mu} \frac{[\Gamma(1+\frac{\mu}{2})]^2}{\Gamma(2+\mu)} a^{3+\mu} \equiv q(\mu) a^{3+\mu}.$$

Для быстрого определения коэффициента  $q(\mu)$  построен график (фиг. 25). Для кругового кольца момент инерции  $I_m$  находится посредством вычитания. В заключение приводим некоторые формулы.

*Прямоугольник* (высота  $2h$ , ширина  $2b$ )

$$I = \frac{4}{3} b h^3; \quad I_m = \frac{2 b h^{2+\mu}}{1 + \mu/2}$$

$$\chi_1 = \frac{1 + 2m}{3m}; \quad \Sigma_1 = \frac{1}{9} \frac{(m-1)^2}{m(m+2)} \frac{b}{h}.$$

*Круг* (радиус  $a$ ):

$$I = \frac{\pi}{4} a^4; \quad I_m = q(\mu) a^{3+\mu};$$

$$\chi_1 = \frac{\pi}{4q(\mu)}; \quad \Sigma_1 = \frac{1}{4} \left[ \chi_1 q(2\mu - 1) - \frac{\pi}{4} \right].$$

*Круговое кольцо* (внутренний радиус  $a$ , внешний радиус  $b$ ;  $\alpha \equiv a/b$ ):

$$I = \frac{\pi}{4} (b^4 - a^4); \quad I_m = q(\mu) (b^{3+\mu} - a^{3+\mu});$$

$$\chi_1 = \frac{\pi}{4q(\mu)} \frac{1 - \alpha^4}{1 - \alpha^{3+\mu}}; \quad \Sigma_1 = \frac{1 - \alpha^4}{4} \left[ \chi_1 q(2\mu - 1) (1 - \alpha^{2+2\mu}) - \frac{\pi}{4} \right].$$

## § 16. Общий случай изгиба

Перейдем к случаю изгиба стержня под действием поперечных нагрузок; мы изложим решение этой задачи, основанное на обычном в задачах сопротивления материалов пренебрежении влиянием касательных напряжений.

1. Начальное упругое состояние ( $t=0$ ) описывается зависимостями (15.01), (15.02), причем изгибающий момент  $M$  здесь уже является функцией  $z$ . Методы нахождения упругой линии  $u = u(z)$  общеизвестны и мы на них не останавливаемся. Напомним лишь, что упругая потенциальная энергия балки равна

$$\bar{\Pi}' = \int_0^l \frac{EI}{2} \left( \frac{d^2 u}{dz^2} \right)^2 dz = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dz, \quad (16.01)$$

где  $l$  — длина балки.

II. Состояние установившейся ползучести. Мы будем считать, что и в состоянии установившейся ползучести стержня, изгибаемого поперечными силами, можно пренебречь влиянием касательных напряжений и пользоваться соотношениями (15.09), (15.10). Определение скорости изменения ординат линии прогибов балки сводится к интегрированию дифференциального уравнения (15.10) при тех же, что и для упругой балки, граничных условиях. Интегрирование легко выполняется

$$v = \pm \int_{z_1}^z \int_{z_0}^z \frac{|M|^m}{D} dz dz + C_1 z + C_2,$$

где  $C_1$ ,  $C_2$  — произвольные постоянные; двукратный интеграл приводится к однократному

$$v = \pm \int_{z_0}^z (z - \zeta) \frac{|M|^m}{D} d\zeta + C_1 z + C_2. \quad (16.02)$$

Знаки в этих формулах следует выбирать так, чтобы совпадали знаки второй производной  $\frac{d^2 v}{dz^2}$  и правой части. Напряжения вычисляются по формуле (15.09).

III. Вариационное уравнение установившейся скорости прогиба. Истинная скорость прогиба балки в состоянии установившейся ползучести должна сообщать минимальное значение мощности балки (см. § 6). Составим соответствующее вариационное уравнение. Пусть скорость прогиба  $v = v(z)$  получила бесконечно малое приращение  $\delta v$ , совместимое с геометрическими связями (условиями закрепления балки). Мощность внутренних сил на этих вариациях равна (см. § 15)

$$\int_0^l \delta L'' dz.$$

Если  $p(z)$  — нагрузка на единицу длины балки, то мощность внешних сил равна

$$\int_0^l p(z) \delta v dz.$$

Приравнявая эти мощности и считая, что нагрузка  $p(z)$

не зависит от скорости  $v$ , получим вариационное уравнение

$$\delta \int_0^l \left\{ \frac{D^\mu}{\mu+1} \left| \frac{d^2 v}{dz^2} \right|^{\mu+1} - p(z)v \right\} dz = 0. \quad (16.03)$$

Это уравнение заменяет собою как дифференциальное уравнение изгиба (15.10), так и граничные условия (подробнее об этом см. [7], § 35).

Основываясь на уравнении (16.03), удобно искать приближенные решения по методу Рунца.

IV. Приложение принципа минимума дополнительного рассеяния. Выше было установлено (§ 6), что истинное распределение напряжений сообщает минимум дополнительному рассеянию тела  $\bar{\Lambda}''$  (если мощность вариаций внешних сил равна нулю); было также показано, что если к телу приложены сосредоточенные обобщенные силы  $P_i$ , то

частная производная  $\frac{\partial \bar{\Lambda}''}{\partial P_i}$  равна соответствующей обобщенной скорости  $\tilde{v}_i$  точки приложения силы  $P_i$ . Эта теорема очень удобна для определения скоростей прогиба в задачах установившейся ползучести при изгибе. При этом

$$\bar{\Lambda}'' = \int_0^l \frac{|M|^{m+1}}{D(m+1)} dz. \quad (16.04)$$

Установившаяся скорость прогиба под сосредоточенной силой  $P_i$  в направлении последней (или угловая скорость поворота сечения  $\omega$  в точке приложения сосредоточенного момента  $M_0$ ) равна

$$\tilde{v}_i = \frac{\partial \bar{\Lambda}''}{\partial P_i} \quad \left( \omega = \frac{\partial \bar{\Lambda}''}{\partial M_0} \right). \quad (16.05)$$

Наконец, лишние неизвестные  $X_1'', X_2'', \dots, X_s''$  для состояния установившейся ползучести определяются из уравнений

$$\frac{\partial \bar{\Lambda}''}{\partial X_1''} = 0; \quad \frac{\partial \bar{\Lambda}''}{\partial X_2''} = 0; \quad \dots; \quad \frac{\partial \bar{\Lambda}''}{\partial X_s''} = 0. \quad (16.06)$$



V. Пример. Рассмотрим задачу об установившейся ползучести консольной балки, изгибаемой собственным весом и сосредоточенной силой  $P$  на конце; сечение балки постоянно. Изгибающий момент

$$M = P(l - z) - \frac{\gamma}{2}(l - z)^2,$$

где  $\gamma$  — вес единицы длины балки. Скорость прогиба под силой

$$\tilde{v} = \frac{1}{D} \int_0^z M^m \frac{\partial M}{\partial P} dz.$$

Введем безразмерные величины  $\zeta$  и  $\lambda$ :

$$l - z = \zeta; \quad \frac{\gamma l}{2P} = \lambda.$$

Теперь

$$\tilde{v} = \frac{P m l^{m+2}}{D} \int_0^1 (1 + \lambda \zeta)^m \zeta^{1+m} d\zeta. \quad (16.07)$$

Пусть  $\lambda < 1$ , тогда можно воспользоваться разложением

$$(1 + \lambda \zeta)^m = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} \lambda^k \zeta^k.$$

Интегрируя почленно, находим:

$$\tilde{v} = \frac{P m l^{m+2}}{D} \left[ \frac{1}{m+2} + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} \frac{\lambda^k}{m+k+2} \right]. \quad (16.08)$$

Случай невесомой балки соответствует  $\lambda = 0$ .

VI. Неустановившаяся ползучесть. Рассмотрим сначала статически определяемые задачи; реакции опор в этом случае известны, следовательно, мы имеем задачу о ползучести тела под действием постоянных заданных нагрузок, изученную в § 9. Разыскивая решение в виде:

$$\sigma_z = \sigma'_z + \tau(t)(\sigma''_z - \sigma'_z),$$

мы придем, очевидно, к прежнему результату

$$\Omega(t) = \frac{d^2 \bar{\Pi}}{d\tau^2} \int_0^\tau \frac{d\tau}{P(\tau)} \quad (16.09)$$

и нужно лишь установить конкретный вид  $\frac{d^2 \bar{\Pi}}{d\tau^2}$  и  $P(\tau)$ . Принимая общую формулу (9.14) к изгибу, находим:

$$P(\tau) = -8.3^{-\frac{m+1}{2}} \int_0^l dz \int_0^h b(y) \sigma_z^m (\sigma_z'' - \sigma_z') dy. \quad (16.10)$$

Введем безразмерные величины (15.16) и ограничимся, для простоты, рассмотрением стержня постоянного поперечного сечения; после некоторых преобразований, получаем:

$$\frac{d^2 \bar{\Pi}}{d\tau^2} = \frac{8h^4}{I} \Sigma_1 \bar{\Pi}'; \quad P(\tau) = \frac{8(m+1)B_1(\infty)h^{3+m}}{I_m(\sqrt{3}\epsilon_1)^{m+1}} P_1(\tau) \bar{\Lambda}'', \quad (16.11)$$

где  $P_1(\tau)$  и  $\Sigma_1$  даны формулами (15.20),  $\bar{\Lambda}''$  — дополнительное рассеяние (16.04), а  $\bar{\Pi}'$  — упругая потенциальная энергия балки (16.01) в начальном состоянии. Теперь из (16.09) следует:

$$t_{11}^* = \int_0^\tau \frac{d\tau}{P_1(\tau)}, \quad (16.12)$$

где введено безразмерное время

$$t_{11}^* = \frac{(m+1)\bar{\Lambda}''B_1(\infty)}{2\epsilon_1^m \Sigma_1 \bar{\Pi}'} \Omega_1(t). \quad (16.13)$$

Полученная зависимость  $\tau$  от  $t_{11}^*$  совпадает с прежней зависимостью  $\tau$  от  $t_1^*$  в задаче чистого изгиба; для данного поперечного сечения и фиксированного  $m$  кривая  $\tau = \tau(t_{11}^*)$  строится раз навсегда, независимо от эпюры изгибающего момента. В каждом конкретном случае производятся лишь иные отсчеты по оси времен; эти отсчеты определяются формулой (16.13) и зависят, конечно, от эпюры изгибающего момента.

Рассмотрим простейший пример — изгиб консоли прямоугольного поперечного сечения силой, приложенной на конце.

Изгибающий момент  $M = P(l - z)$ ; находим:

$$\bar{\Pi}' = \frac{P^2 l^3}{6EI}; \quad \bar{\Lambda}'' = \frac{P^{m+1} l^{m+2}}{(m+1)(m+2)D};$$

$$t_{11} = \frac{27mE}{(m-1)^2} \left( \frac{Plh}{I} \right)^{m-1} \Omega_1(t).$$

Перейдем теперь к *статически неопределимым задачам*. Обозначим лишние неизвестные через  $X_1, X_2, \dots, X_s$ . Пусть в начальном состоянии ( $t=0$ ) эти величины имеют значения  $X'_1, X'_2, \dots, X'_s$ , а в состоянии установившейся ползучести —  $X''_1, X''_2, \dots, X''_s$ . Напряжения  $\sigma_z, \sigma_z''$  можно считать известными. Рассмотрим состояние неустановившейся ползучести. В каждом сечении балки изгибающий момент  $M$  является линейной функцией заданных нагрузок и лишних неизвестных. Дополнительная мощность будет, очевидно, функцией лишних неизвестных  $X_1, X_2, \dots, X_s$ . Значения последних определяются из условий стационарности дополнительной мощности

$$\frac{\partial}{\partial X_i} \left( \bar{\Lambda} + \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t} \right) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, s). \quad (16.14)$$

Это — система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно  $\frac{dX_i}{dt}$ ; к ней следует присоединить начальные условия

$$\text{при } t=0 \quad X_i = X'_i \quad (i=1, 2, \dots, s). \quad (16.15)$$

Система (16.14) в развернутой форме такова

$$B(t) \frac{\partial \bar{\Lambda}_1}{\partial X_i} + \sum_{k=1}^s \frac{\partial^2 \bar{\Pi}}{\partial X_i \partial X_k} \frac{dX_k}{dt} = 0. \quad (16.16)$$

Так как  $\bar{\Pi}$  — квадратичная функция напряжений и, следовательно, квадратичная функция  $X_i$ , то  $\frac{\partial^2 \bar{\Pi}}{\partial X_i \partial X_k}$  постоянны; разрешая систему уравнений (16.16) относительно производных  $\frac{dX_i}{dt}$  (определитель системы  $\Delta > 0$ , т. к.  $\bar{\Pi}$  — положи-

тельная квадратичная форма), найдем:

$$\frac{dX_i}{dt} = -\frac{B(d)}{\Delta} \sum_{k=1}^s \Delta_{ik} \frac{\partial \bar{\Lambda}_1}{\partial X_k}, \quad (i=1, 2, \dots, s) \quad (16.17)$$

где  $\Delta_{ik}$  — алгебраическое дополнение элемента  $\frac{\partial^2 \bar{\Pi}}{\partial X_i \partial X_k}$ . Отсюда вытекает, что  $\frac{dX_i}{dt} \rightarrow 0$  с приближением к установившемуся состоянию, т. к. при  $X_i = X_i''$  все  $\frac{\partial \bar{\Lambda}_1}{\partial X_i} = 0$  в силу (16.06). Интегрирование системы нелинейных уравнений (16.17), вообще говоря, затруднительно; исключение составляет случай  $s=1$ , для которого сразу получается решение в квадратурах.

Приближенное решение рассматриваемой задачи ищем в форме

$$X_i = X_i' + \tau(t)(X_i'' - X_i'). \quad (i=1, 2, \dots, s) \quad (16.18)$$

Теперь, как и в общем случае (§ 9), дополнительная мощность деформации является функцией лишь от  $\tau$ ; условие стационарности  $\bar{\Phi}$  приводит к прежнему дифференциальному уравнению (9.03), решение которого есть

$$\Omega(t) = \frac{d^2 \bar{\Pi}}{d\tau^2} \int_0^{\tau} \frac{d\tau}{-\frac{d\bar{\Lambda}_1}{d\tau}}. \quad (16.19)$$

Это решение характеризуется прежними свойствами. В рассматриваемой задаче

$$\bar{\Pi} = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dz; \quad \bar{\Lambda}_1 = B_1(\infty) \int_0^l \frac{|M|^{m+1}}{(m+1)D} dz, \quad (16.20)$$

где  $M$  — изгибающий момент, выраженный в функции  $X_i$ . При  $s=1$  мы получаем точное решение.

VII. Пример. Рассмотрим задачу о неустойчивости балки (фиг. 26), изгибаемой моментом  $M_0$ , приложенным на опоре. Обозначим реакцию опоры через  $X_1$ . Тогда

$$M = M_0 - X_1(l - z).$$

Нетрудно найти, что  $X_1' = \frac{3M_0}{2l}$ . Пусть  $m=3$ , тогда

$$\bar{\Lambda}'' = \frac{1}{4D} \int_0^l M^3 dz.$$

Найдем  $X_1''$ ; условие  $\frac{\partial \bar{\Lambda}''}{\partial X_1''} = 0$  приводит к кубическому уравнению

$$\lambda^3 - \frac{15}{4}\lambda^2 + 5\lambda - \frac{5}{2} = 0, \quad (16.21)$$

где введено обозначение  $\lambda = \frac{X_1'' l}{M_0}$ ;

это уравнение имеет лишь один вещественный корень  $\lambda = 1,61$ , следо-

вательно,  $X_1'' = 1,61 \frac{M_0}{l}$ . Полагаем  $X_1 = X_1' + \tau(t)(X_1'' - X_1')$ , вносим в выражение изгибающего момента  $M$  и по формуле (16.20) находим полином третьей степени от  $\tau$

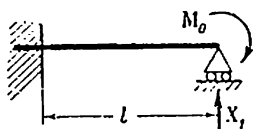
$$-\frac{d\bar{\Lambda}_1}{d\tau} = \frac{B_1(\infty)}{D} 0,11 \cdot \frac{M_0}{l} \int_0^l M^3 (l-z) dz.$$

Нетрудно видеть, что  $\tau=1$  обращает в нуль  $\frac{d\bar{\Lambda}_1}{d\tau}$  и что  $-\frac{d^2\bar{\Lambda}_1}{d\tau^2} < 0$ . Далее, находим:

$$\frac{d^2\bar{\Lambda}_1}{d\tau^2} = \frac{1}{EI} \int_0^l \left(\frac{dM}{d\tau}\right)^2 dz = \frac{l^3}{3EI} \left(0,11 \frac{M_0}{l}\right)^2.$$

Функция  $\tau = \tau(Q)$  определяется уравнением (16.19); на вычислениях мы не останавливаемся.

VIII. Релаксационные задачи. Пусть в момент времени  $t=0$  ось балки получила в некоторых точках заданные смещения и повороты, которые в последующее время  $t > 0$  не изменяются; предполагается, что балка свободна от нагрузок.



Фиг. 26.

Релаксационные задачи этого типа решаются общим методом (§ 10), так что вопрос сводится к вычислению  $\sigma'_x$  и коэффициента  $\chi$  по формуле (10.08). Заметим, что

$$\int \int \int_V \Pi' dV = \int_0^l \frac{M'^2}{2EI} dz;$$

$$\int \int \int_V T'^{m+1} dV = 4 \int_0^l \left| \frac{M'}{\sqrt{3} I} \right|^{m+1} dz \int_0^h b(y) y^{1+m} dy,$$

где  $M'$  — изгибающий момент в начальном упругом состоянии.

Вычислив  $\chi$ , исходим из уравнения релаксации (10.06) или соответствующего графика.

### § 17. Изгиб кривых стержней

1. Общие положения. Будем считать размеры поперечного сечения стержня малыми сравнительно с радиусом кривизны осевой линии. Тогда с достаточной точностью можно пользоваться для упругой потенциальной энергии и дополнительного рассеяния элемента стержня соответствующими формулами для прямого стержня. Суммируя, получим:

$$\overline{\Pi}' = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} ds \quad (17.01)$$

для начального состояния, где  $ds$  — дифференциал дуги осевой линии стержня, а  $l$  — длина ее. Для состояния установившейся ползучести

$$\overline{\Delta}'' = \int_0^l \frac{|M|^{m+1}}{(m+1)D} ds. \quad (17.02)$$

Скорости смещений и поворотов оси стержня в отдельных точках проще всего определять по теореме (6.19). Теория неустановившейся ползучести развивается аналогично предыдущему.

II. Пример. Рассмотрим установившуюся ползучесть при чистом изгибе стержня круговой формы (фиг. 27). Здесь  $M = \text{const}$ , следовательно:

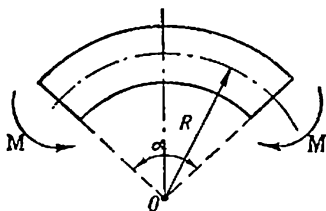
$$\bar{A}'' = \frac{|M|^{m+1}}{(m+1)D} R\alpha, \quad (17.03)$$

где  $R$  — радиус кривизны оси стержня. Скорость изменения угла  $\alpha$ :

$$\omega = \frac{\partial \bar{A}''}{\partial M}. \quad (17.04)$$

Таким образом

$$\frac{\omega}{\alpha} = \frac{|M|^m R}{D}. \quad (17.05)$$



Фиг. 27.

## § 18. Изгиб кривых тонкостенных труб

Опыты по изгибу лирообразных компенсаторов показали, что деформации последних в несколько раз превышают значения, вытекающие из классической теории изгиба. Карман показал [38], что причиной этого является сплющивание трубы при изгибе и дал приближенную теорию изгиба упругих тонкостенных труб с криволинейной осью, хорошо подтверждаемую экспериментами. Результат Кармана — так называемый коэффициент Кармана — широко применяется в инженерных расчетах.

Теория Кармана основана на предположении об идеальной упругости материала трубы. Однако сплющивание трубы оказывает существенное влияние на изгиб кривых труб в условиях ползучести (и при „обычном“ пластическом изгибе); эта задача рассматривается ниже, причем мы ограничиваемся случаем установившейся ползучести.

I. Деформация трубы. Мы будем придерживаться той же схемы деформации трубы, какая была развита в работе Кармана.

Рассмотрим тонкостенную круглую трубу, изогнутую по дуге круга радиуса  $R$  (фиг. 28); пусть  $r$  — радиус средней линии  $s$  сечения трубы, нормального к осевой линии,  $h_1$  — толщина стенки трубы. Положение некоторой точки трубы будем характеризовать углом  $\psi$ , углом  $\varphi$  и рас-

стоянием  $\zeta$ , отсчитываемым от средней линии сечения в направлении радиуса-вектора; при этом

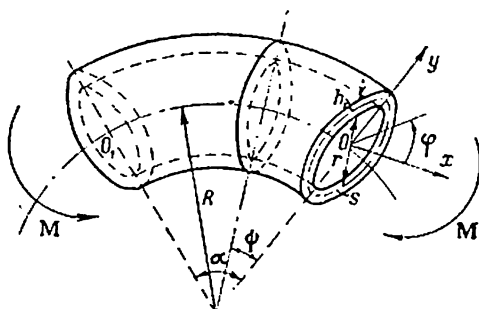
$$0 \leq \psi \leq \alpha; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \quad -\frac{h_1}{2} \leq \zeta \leq \frac{h_1}{2}.$$

Труба изгибается моментами  $M$ . При деформации угол  $\alpha$  перейдет в угол  $\alpha_1$ ,  $R$  — в  $R_1$ , длина же осевой линии трубы  $OO_1$  не изменится, т. е.  $\alpha R = \alpha_1 R_1$ .

Следовательно:

$$\Delta\alpha \equiv \alpha_1 - \alpha = \alpha R \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right). \quad (18.01)$$

Предполагая сперва сечение трубы неизменным, найдем относительное удлинение волокна, лежащего на расстоя-



Фиг. 28.

нии  $y = r \sin \varphi$  от оси  $x$  ( $x, y, z$  — подвижной триэдр осей; плоскость  $yz$  совпадает с плоскостью кривизны оси трубы):

$$\epsilon_{\psi 1} = \frac{y \Delta \alpha}{(R + y) \alpha}.$$

Будем считать, что

$$R \gg r \gg h_1, \quad (18.02)$$

тогда

$$\epsilon_{\psi 1} \approx \frac{y \Delta \alpha}{R \alpha}. \quad (18.03)$$

Вследствие сплющивания сечения продольные волокна трубы получают дополнительное удлинение  $\epsilon_{\psi 2}$ . Пусть  $u_y$  —



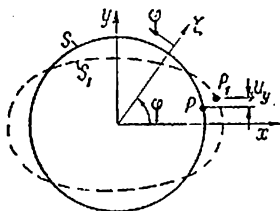
смещение некоторой точки  $P$  срединной линии  $s$  в направлении  $y$  (фиг. 29). При неизменном угле  $\alpha$  длина волокна трубы после сплющивания равна  $l_1 = (R + y + u_y)\alpha$ ; до сплющивания длина волокна равна  $l = (R + y)\alpha$ , поэтому

$$\varepsilon_{y2} = \frac{l_1 - l}{l} = \frac{u_y}{R}.$$

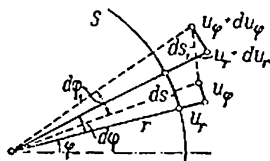
Полное удлинение волокна

$$\varepsilon_\psi = \varepsilon_{\psi1} + \varepsilon_{\psi2} = \frac{1}{R} \left( y \frac{\Delta \alpha}{\alpha} + u_y \right). \quad (18.04)$$

Вычислим теперь относительные удлинения в перпендикулярных к продольному волокну направлениях  $\varphi$  и  $\zeta$  (фиг. 29), предполагая, что поперечные сечения трубы после дефор-



Фиг. 29.



Фиг. 30.

мации остаются плоскими, а прямая в направлении  $\zeta$  переходит в прямую же линию. Тогда поперечное сечение испытывает „деформацию изгиба“ и

$$\varepsilon_\varphi = \zeta \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right),$$

где  $r_1$  — радиус кривизны средней линии  $s_1$  (после деформации); радиус-вектор линии  $s_1$  равен

$$\rho = r + u_r,$$

где  $u_r$  — радиальное смещение точки срединной линии (фиг. 30). Выражение кривизны в полярных координатах имеет вид:

$$\frac{1}{r_1} = \left[ \rho^2 + 2 \left( \frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 - \rho \frac{d^2\rho}{d\varphi^2} \right] \left[ \rho^2 + \left( \frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 \right]^{-3/2}.$$

Считая величины  $u_r$ ,  $\frac{du_r}{d\varphi}$ ,  $\frac{d^2u_r}{d\varphi^2}$  малыми сравнительно с  $r$  и удерживая в последней формуле члены первого порядка малости, получаем:

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \approx -\frac{1}{r^2} \left( \frac{d^2u_r}{d\varphi^2} + u_r \right). \quad (18.05)$$

Наконец, удлинение  $\epsilon_\zeta$  (в направлении оси  $\zeta$ ) определяем из условия несжимаемости материала:

$$\epsilon_\psi + \epsilon_\varphi + \epsilon_\zeta = 0. \quad (18.06)$$

Очевидно, что взаимно-перпендикулярные направления  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\zeta$  после деформации также взаимно-перпендикулярны, следовательно, они являются главными направлениями деформации. Поперечное сечение испытывает „изгиб“, поэтому можно принять, что срединная линия  $s$  сохраняет длину, изменяясь лишь по форме. Это условие приводит к простому соотношению между смещениями  $u_r$  и  $u_\varphi$ . Угол  $d\varphi$  и дуга  $ds = r d\varphi$  после деформации будут соответственно равны  $d\varphi_1$  и  $ds_1$ , причем в силу нерастяжимости срединной линии  $ds_1 = ds$ . Нетрудно видеть, что

$$d\varphi_1 = \frac{(r + u_r) d\varphi + du_\varphi}{r + u_r} \approx \left( 1 + \frac{1}{r} \frac{du_\varphi}{d\varphi} \right) d\varphi;$$

$$ds_1 = \sqrt{(r + u_r)^2 d\varphi_1^2 + (du_r)^2} \approx r d\varphi \left( 1 + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{d\varphi} \right).$$

Теперь из условия  $ds_1 = ds$  получаем:

$$u_r = -\frac{du_\varphi}{d\varphi}. \quad (18.07)$$

Используя это соотношение и замечая, что

$$u_y = u_r \sin \varphi + u_\varphi \cos \varphi,$$

приходим к формулам:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_\psi &= \frac{1}{r} \left( \frac{\Delta \alpha}{\alpha} r \sin \varphi + u_\varphi \cos \varphi - \frac{du_\varphi}{d\varphi} \sin \varphi \right); \\ \epsilon_\varphi &= \frac{\zeta}{r^2} \left( \frac{d^3 u_\varphi}{d\varphi^3} + \frac{du_\varphi}{d\varphi} \right); \\ \epsilon_\zeta &= -(\epsilon_\psi + \epsilon_\varphi). \end{aligned} \right\} \quad (18.08)$$

Для того, чтобы перейти к скоростям деформации, продифференцируем (18.08) по времени

$$\left. \begin{aligned} \xi_\psi &= \frac{d\varepsilon_\psi}{dt} = \frac{1}{r} \left( \frac{\omega}{\alpha} r \sin \varphi + v_\varphi \cos \varphi - \frac{dv_\varphi}{d\varphi} \sin \varphi \right); \\ \xi_\varphi &= \frac{d\varepsilon_\varphi}{dt} = \frac{\zeta}{r^2} \left( \frac{d^3 v_\varphi}{d\varphi^3} + \frac{dv_\varphi}{d\varphi} \right); \\ \xi_\zeta &= -(\xi_\varphi + \xi_\psi), \end{aligned} \right\} \quad (18.09)$$

где  $v_\varphi$  — скорость в направлении оси  $\varphi$ ,  $\omega$  — скорость изменения угла  $\alpha$ . Направления  $\psi$ ,  $\varphi$ ,  $\zeta$  являются главными направлениями скорости деформации.

Скорость  $v_\varphi$  можно представить некоторым рядом Фурье; удержим в этом ряду лишь первое слагаемое, являющееся главным членом в разложении и характеризующее сплюсчивание круговой линии  $s$ . Тогда

$$v_\varphi = -C_1 \sin 2\varphi; \quad v_r = -2C_1 \cos 2\varphi. \quad (18.10)$$

Положим, далее,  $2C_1 = \frac{\omega}{\alpha} r C$ , где  $C$  — подлежащая определению постоянная; угловая скорость  $\dot{\omega}$  также должна быть найдена. Теперь

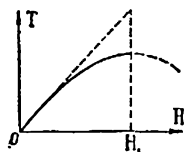
$$\left. \begin{aligned} \xi_\psi &= \frac{\omega}{\alpha} \frac{r \sin \varphi}{R} (1 - C \sin^2 \varphi); \\ \xi_\varphi &= \frac{\omega}{\alpha} \frac{3\zeta}{r} C \cos 2\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (18.11)$$

Постоянные  $C$  и  $\omega$  мы определим из условия минимума мощности системы (§ 6); при этом мы сначала найдем  $C$  при фиксированном  $\omega$  (т. е. при  $\delta \mathcal{L} = 0$ ) из условия минимума рассеяния  $\bar{L} = \min$ . Второе же уравнение мы получим, сопоставляя мощность внутренних сил с мощностью внешних сил.

II. Аппроксимация кривой  $TH$ . В некотором интервале скоростей деформации аппроксимируем кривую  $TH$  параболой (фиг. 31):

$$T = 2A_1 H - 4A_2 H^3, \quad (18.12)$$

где  $A_1 > 0$ ,  $A_2 \geq 0$  — константы. Так как всегда  $\frac{dT}{dH} \geq 0$ , то



Фиг. 31.

аппроксимация (18.12) пригодна лишь при  $H < H_1$ , следовательно:

$$K \equiv \frac{A_2}{A_1} \leq \frac{1}{6H_1^2}. \quad (18.13)$$

Выбор зависимости  $TH$  в форме (18.12) позволяет преодолеть алгоритмические трудности.<sup>1</sup> При этом вариационное уравнение  $\bar{L} = \min$  получает вид:

$$\bar{L} \equiv R\alpha r \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{1}{2}h_1}^{\frac{1}{2}h_1} (A_1 H^2 - A_2 H^4) d\zeta = \min, \quad (18.14)$$

т. к. напряжения и скорости деформации не зависят от  $\psi$ .

III. Определение  $C$  и  $\omega$ . Вычислим прежде всего интенсивность скоростей деформаций сдвига  $H$ ; с помощью условия несжимаемости находим:

$$H^2 = 4(\xi_\psi^2 + \xi_\varphi \xi_\psi + \xi_\varphi^2). \quad (18.15)$$

Внеся сюда  $\xi_\varphi$ ,  $\xi_\psi$  по формулам (18.11) и выполняя в (18.14) интегрирование по  $\varphi$  и  $\zeta$  (на вычислениях мы не останавливаемся), получаем:

$$\bar{L} = \gamma [P(C, \lambda) - Q(C, \lambda) X], \quad (18.16)$$

где введены обозначения

$$\left. \begin{aligned} P(C, \lambda) &= 1 - \frac{3}{2}C + \left(\frac{5}{4} + \frac{3}{2}\lambda^2\right)\frac{C^2}{2}; \\ Q(C, \lambda) &= 3 - 10C + \frac{21}{2}\left(\frac{5}{4} + \frac{3}{7}\lambda^2\right)C^2 - \frac{63}{8}(1 + \\ &\quad + \lambda^2)C^3 + \frac{1}{16}\left(\frac{231}{8} + \frac{117}{2}\lambda^2 + \frac{243}{5}\lambda^4\right)C^4; \\ \frac{Rh_1}{r^2} &= \lambda; \quad \frac{r}{R} = \nu; \quad \frac{4\alpha r^3 h_1 \pi}{R} A_1 \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2 = \gamma; \\ X &= K\nu^2 \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2 \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.17)$$

<sup>1</sup> В соответствующей задаче теории малых упруго-пластических деформаций следует полагать  $T = 2A'_1 \Gamma - 4A'_2 \Gamma^3$ , где  $A'_1$ ,  $A'_2$  — некоторые постоянные; эта зависимость недавно использована в задаче

Заметим, что  $P(C, \lambda)$  и  $Q(C, \lambda)$  очевидно, положительные формы, т. е.  $P(C, \lambda) > 0$ ,  $Q(C, \lambda) > 0$ .

Условие стационарности  $\bar{L}$  приводится к кубическому уравнению относительно  $C$ :

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \bar{L}}{\partial C} = P'(C, \lambda) - Q'(C, \lambda) X = 0, \quad (18.18)$$

где штрих означает дифференцирование по  $C$ . Далее, мощность момента  $M$ :

$$\mathcal{L} = M\omega.$$

Но по формулам (8.04) и (18.12)

$$\mathcal{L} = \iiint_V TH dV = R\sigma r \int_0^{2\pi} dz \int_{-\frac{1}{2}h_1}^{\frac{1}{2}h_1} (2A_1 H^2 - 4A_2 H^4) d\zeta.$$

Следовательно, предыдущее соотношение приобретает вид:

$$P(C, \lambda) - 2Q(C, \lambda) X = Y, \quad (18.19)$$

где положено

$$\frac{M\omega}{2\gamma} = Y \geq 0. \quad (18.20)$$

Система уравнений (18.18) и (18.19) определяет величины  $C$ ,  $\omega$ . Непосредственное решение этих уравнений, конечно, затруднительно. Поступим следующим образом. Рассмотрим плоскость переменных  $X$ ,  $Y$ ; на ней уравнения (18.18), (18.19) представляют семейство кривых

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{P'(C, \lambda)}{Q'(C, \lambda)}, \\ Y &= P(C, \lambda) - 2Q(C, \lambda) \frac{P'(C, \lambda)}{Q'(C, \lambda)}, \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

зависящее от одного параметра  $\lambda$ . Далее, исключая из формул для  $X$  и  $Y$  неизвестное  $\frac{\omega}{\alpha}$ , приходим ко второму

о пластическом изгибе пластины [43]. Для алюминиевого сплава в цитированной работе приведены следующие данные:  $A'_1 = 2,65 \times 10^5 \text{ кг/см}^2$ ,  $A'_2 = 5,17 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^2$ ; эта аппроксимация дает хорошие результаты при  $\Gamma < 8,5 \cdot 10^{-3}$ .

семейству кривых

$$XY^2 = n^2, \quad (\text{II})$$

где положено

$$n = \frac{M \sqrt{K}}{8\pi r^2 h_1 A_1}.$$

Пересечение соответствующих кривых семейств (I), (II) даст нам искомые значения  $X$ ,  $Y$ , по которым уже легко найти  $\omega$ . Это решение пригодно для не слишком больших значений изгибающего момента; в самом деле:

$$n \leq \frac{M}{7,86 \sqrt{6} \cdot H_1 A_1 W},$$

где  $W \approx 3,2 r^2 h_1$  — момент сопротивления. По основной зависимости (18.12) для простого растяжения имеем:

$$\frac{\sigma_\psi}{\sqrt{3}} = 2A_1 \sqrt{2} \xi_\psi - 4A_2 (\sqrt{2} \xi_\psi)^3.$$

Рассмотрим изгиб прямой трубы; отбросим в последнем соотношении слагаемое  $4A_2 (\sqrt{2} \xi_\psi)^3$ , тогда  $\frac{M}{W}$  есть максимальное напряжение; действительное напряжение будет, очевидно, ниже по величине. Но согласно (18.12):

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{M}{W} < 2A_1 H_1,$$

следовательно,  $n < \frac{\sqrt{2}}{7,86} \approx 0,2$ . Далее:

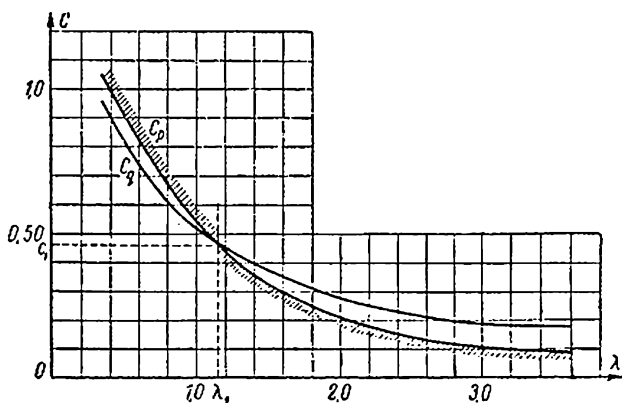
$$X = K \left( \nu \frac{\omega}{\alpha} \right)^3 \leq \frac{1}{6} \left( \frac{\nu \omega}{\alpha H_1} \right)^2.$$

Легко видеть, что  $\frac{|\xi_\psi|}{H} < 0,6$ , а  $|\xi_\psi|_{\max} = \beta \nu \frac{\omega}{\alpha}$ , где  $0,38 \leq \beta \leq 1$  (так как  $C$  может лишь незначительно превышать единицу — см. ниже). Следовательно  $X < 0,4$ . В действительности,  $X$  значительно меньше единицы.

Обратимся к семейству кривых (I). Рассмотрим функцию  $P(C, \lambda)$ ;  $P'(C, \lambda)$  обращается в нуль в „точке Кармана“

$$C_p = \frac{6}{5 + 6\lambda^2}. \quad (18.21)$$

Нетрудно видеть, что  $P(C, \lambda)$  обращена вогнутостью вверх и в точке  $C_p$  имеет абсолютный минимум, равный  $P(C_p, \lambda) > 0$ . Далее, как мы знаем  $Q(C, \lambda) > 0$ ; легко убедиться в том, что  $Q''(C, \lambda) > 0$ , а  $Q'(C, \lambda)$  монотонно возрастает, обращаясь в нуль в точке  $C_q$ , где  $Q(C, \lambda)$  имеет минимум. Значения корней  $C_p$  и  $C_q$  даны на фиг. 32 в функ-



Фиг. 32.

ции параметра  $\lambda$ . При значении  $\lambda = \lambda_1 = 1,152$  корни совпадают, т. е.  $C_p = C_q \equiv C_1 = 0,462$ .

Исследования Кармана показали, что в соответствующей упругой задаче первое приближение является недостаточным для малых  $\lambda < 0,3$ . Поэтому и в нашем случае первое приближение следует считать ненадежным для малых  $\lambda$ ; на этом основании мы не будем в дальнейшем рассматривать значений  $\lambda < 0,3$ .

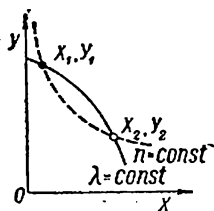
Так как  $X \geq 0$  и при данном  $\lambda$   $X$  может изменяться от нуля, а  $C_p \leq C_q$  соответственно при  $\lambda \leq \lambda_1$ , то необходимо различать следующие интервалы изменения параметра  $C$  в формулах (1):

$$\begin{aligned} \text{при } \lambda < \lambda_1 & \quad C > C_p; \\ \text{при } \lambda = \lambda_1 & \quad C = C_1; \\ \text{при } \lambda > \lambda_1 & \quad 0 \leq C \leq C_p. \end{aligned} \quad (18.22)$$

Эти интервалы показаны на фиг. 32 штриховкой. Случаю  $\lambda = \lambda_1$  отвечает прямая линия

$$Y = P(C_1, \lambda_1) - 2Q(C_1, \lambda_1)X. \quad (18.23)$$

Точкам на оси  $Y$  соответствует решение Кармана для упругой трубы (если, конечно, перейти от скоростей деформации к компонентам деформации). Если  $\lambda$  очень велико (прямая труба), то параметр  $C = 0$ .



Фиг. 33.

Этому случаю на плоскости  $X, Y$  отвечает прямая линия  $Y = 1 - 6X$ . Если нам известны изгибающий момент  $M$ , геометрические характеристики трубы и свойства материала, из которого она изготовлена, то мы можем вычислить безразмерные параметры  $\lambda, n$  и, следовательно, выбрать соответствующую кривую в каждом из рассматриваемых семейств; точки пересечения выбранных кривых приведут к искомому значению  $X, Y$ . При этом следует брать только верхнюю точку пересечения  $X_1, Y_1$  (фиг. 33), т. к. именно в ней достигается минимум  $\bar{L}$ . В самом деле, с помощью (18.19) и (II) получаем:

$$\bar{L} = \gamma_1 [n\sqrt{X} + Q(C, \lambda)X^2],$$

где  $\gamma_1$  — некоторая положительная постоянная. При малых  $X$  кривая  $Y = Y(X)$  монотонно убывает, тогда  $\bar{L}_1 < \bar{L}_2$ , т. к. в случаях  $\lambda \leq \lambda_1$   $Q(C, \lambda)$  при переходе от  $X_2$  к  $X_1$  уменьшается; в случае же  $\lambda = \lambda_1$   $Q(C_1, \lambda_1)$  есть постоянная.

Можно принять, в согласии с подсчетами, что значения  $C$  мало отличаются<sup>1</sup> от значений  $C_p$ ; это позволяет построить простое решение. Положим

$$C = C_p + c,$$

где  $c$  — малая величина. Разлагая правые части (I) в ряд по степеням  $c$  и удерживая в разложении лишь первые степени, получаем:

$$X = \frac{P''(C_p, \lambda)}{Q'(C_p, \lambda)} c; \quad Y = P(C_p, \lambda) - 2Q(C_p, \lambda) \frac{P''(C_p, \lambda)}{Q'(C_p, \lambda)} c.$$

<sup>1</sup> Это объясняется тем, что  $C_q$  близко к  $C_p$ , а  $X \ll 1$ .



Исключая отсюда  $c$ , находим:

$$Y = P(C_p, \lambda) - 2Q(C_p, \lambda)X. \quad (18.24)$$

С помощью (II) получаем:

$$Y_* = 1 - \frac{\chi}{Y_*^2}, \quad (18.25)$$

где положено

$$Y_* = \frac{Y}{P(C_p, \lambda)}; \quad \chi = 6n^2 q(\lambda); \quad q(\lambda) = \frac{Q(C_p, \lambda)}{3P^3(C_p, \lambda)}.$$

Значение  $Y_* = 1$  соответствует решению Кармана, когда  $\chi = 0$  (с прежней, конечно, оговоркой). Корни  $k_*$  уравнения (18.25) даны на фиг. 34. Заметим, что решение существует лишь для малых  $\chi$  ( $\chi < 0,145$ ). Если пренебрегать сплющиванием, то  $C = 0$ ,  $q(\lambda) = 1$ ,  $P(0, \lambda) = 1$ ; обозначим соответствующий корень уравнения (18.25) через  $k_{*0}$ . Тогда в силу (18.17), (18.20):

$$\frac{\omega_0}{\alpha} = \frac{M}{k_{*0}} \frac{1}{8\pi\nu r^2 h_1 A_1}, \quad (18.26)$$

где через  $\omega_0$  обозначена скорость изменения  $\angle \alpha$  в пренебрежении сплющиванием. Если же учитывать последнее, то

$$\omega = \omega_0 \chi_*, \quad (18.27)$$

где

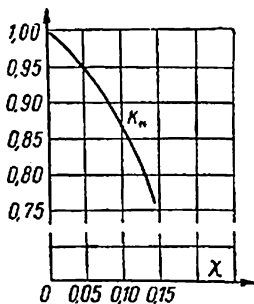
$$\chi_* = \chi_{*0} \frac{k_{*0}}{k_*}, \quad (18.28)$$

причем

$$\chi_{*0} = \frac{1}{P(C_p, \lambda)} = \frac{10 + 12\lambda^2}{1 + 12\lambda^2} \quad (18.29)$$

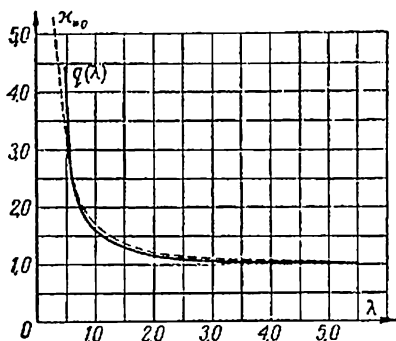
есть коэффициент Кармана. Таким образом, вопрос сводится к вычислению множителя  $k_{*0}/k_*$ ; этот множитель зависит не только от размеров трубы и свойств материала, но и от величины изгибающего момента. Так как  $q(\lambda) \geq 1$  (см. фиг. 35), то всегда

$$k_{*0}/k_* > 1,$$



Фиг. 34.

но не превышает 1,3. Кривизной оси трубы практически можно пренебрегать при  $\lambda > 3$ . При меньших  $\lambda$  в первом приближении можно пользоваться обычным коэффициентом Кармана  $\chi_{*0}$ ; поправка к последнему не превосходит 30% и может быть легко найдена. Подчеркнем, что эти выводы относятся, разумеется, к случаям, когда закон ползучести



Фиг. 35.

удовлетворительно аппроксимируется в рассматриваемом интервале напряжений зависимостью (18.12).

IV. Рассмотрим пример пластического изгиба трубы ( $R=20$  см,  $r=2$  см,  $h_1=0,1$  см), изготовленной из алюминиевого сплава, характеристики которого даны в примечании на стр. 100. Пусть действует изгибающий момент  $M=5000$  кгсм. В нашем примере  $\lambda=0,5$ ;  $\sqrt{K'}=12,5$ ;  $n=2,35 \cdot 10^{-2}$ ;  $\chi_{*0}=3,25$ . Если пренебрегать сплющиванием, то  $q(\lambda)=1$  и  $\chi=0,32 \cdot 10^{-2}$ ; соответствующий корень  $k_{*0} \approx 1$ . Если учитывать сплющивание, то  $q(\lambda)=4$ ;  $\chi=1,3 \cdot 10^{-2}$  и  $k_* = 0,985$ . Согласно (18.28), получаем  $\chi_* = 3,3$ .

## ГЛАВА VI

### КРУЧЕНИЕ

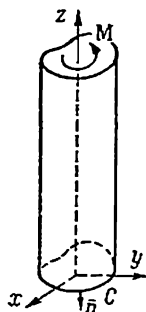
В этой главе мы рассмотрим ползучесть скручиваемых цилиндрических стержней произвольного поперечного сечения. Согласно общему методу, необходимо сначала рассмотреть задачи об упругом кручении и об установившейся ползучести скручиваемого стержня. Первая из этих задач хорошо изучена, и мы приведем лишь некоторые результаты, которые нам понадобятся в дальнейшем. В конце главы рассматривается кручение круглых стержней переменного диаметра.

#### § 19. Начальное упругое состояние

I. Основные положения. Проведем ось  $z$  параллельно оси стержня и закрепим нижний конец стержня (фиг. 36). При упругом кручении поперечные сечения стержня поворачиваются как твердое тело, но, вообще говоря, не остаются плоскими, т. е.

$$u'_x = -\theta zy, \quad u'_y = \theta zx, \quad u'_z = \theta \psi'(x, y),$$

где  $\theta$  — угол кручения на единицу длины стержня, а  $\psi'(x, y)$  — неизвестная функция; попрежнему мы отличаем начальное состояние ( $t=0$ ) одним штрихом. Компоненты начальной упругой деформации



Фиг. 36.

$$\left. \begin{aligned} \epsilon'_x = \epsilon'_y = \epsilon'_z = \gamma'_{xy} &= 0; \\ \gamma'_{xz} &= \theta \left( \frac{\partial \psi'}{\partial x} - y \right); \quad \gamma'_{yz} = \theta \left( \frac{\partial \psi'}{\partial y} + x \right). \end{aligned} \right\} \quad (19.01)$$

Вследствие закона Гука получаем:

$$\sigma'_x = \sigma'_y = \sigma'_z = \tau'_{xy} = 0; \quad \tau'_{xz} = G\gamma'_{xz}; \quad \tau'_{yz} = G\gamma'_{yz}. \quad (19.02)$$

Из трех дифференциальных уравнений равновесия остается одно

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (19.03)$$

Внеся в него напряжения согласно (19.01), (19.02), найдем, что  $\psi'(x, y)$  удовлетворяет уравнению Лапласа. Из условия отсутствия нагрузок на боковой поверхности стержня нетрудно получить предельное условие для функции  $\psi'(x, y)$ .

Другая формулировка задачи основана на введении функции напряжений  $F' = F'(x, y)$ :

$$\tau_{xz} = \frac{\partial F'}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial F'}{\partial x}. \quad (19.04)$$

Теперь уравнение равновесия удовлетворено. Из условия совместности деформаций (19.01) вытекает дифференциальное уравнение для функции напряжений

$$\frac{\partial^2 F'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F'}{\partial y^2} - 2G\theta = 0. \quad (19.05)$$

На боковой поверхности стержня, в силу (19.02), первые два уравнения Коши (402) удовлетворяются тождественно, третье же приводится к виду:

$$\cos(\bar{n}, x) \frac{\partial F'}{\partial x} - \cos(\bar{n}, y) \frac{\partial F'}{\partial y} = 0,$$

где  $\bar{n}$  — нормаль к контуру  $C$  поперечного сечения стержня; так как  $\cos(\bar{n}, x) = \frac{dy}{dC}$ ,  $\cos(\bar{n}, y) = -\frac{dx}{dC}$ , где  $dC$  — дифференциал дуги контура, то последнее уравнение переписывается в форме

$$\frac{\partial F'}{\partial y} \frac{dy}{dC} + \frac{\partial F'}{\partial x} \frac{dx}{dC} = \frac{\partial F'}{\partial C} = 0,$$

т. е. на контуре сечения

$$F' = \text{const.} \quad (19.06)$$

Для односвязного контура можно принять

$$F' = 0 \quad \text{на } C. \quad (19.07)$$

Вследствие этого крутящий момент  $M$  для односвязного контура

$$M = \iint (x\tau_{yz} - y\tau_{xz}) dx dy = 2 \iint F' dx dy. \quad (19.08)$$

II. Вариационное уравнение. Задача упругого кручения представляет собой, в общем, простую математическую задачу. Несравненно более трудной задачей является, как мы увидим ниже, задача об установившейся ползучести скручиваемого стержня. Здесь более или менее общий прием приближенного решения основывается на вариационном уравнении задачи. При этом полезно исходить из функции напряжения в соответствующем приближенном решении упругой задачи. Поэтому мы кратко рассмотрим вариационное уравнение Кастильяно в задаче кручения.

При отсутствии массовых сил уравнение Кастильяно имеет вид:

$$\delta \int \int \int_V \Pi dV = \int \int_S (u'_x \delta X_n + u'_y \delta Y_n + u'_z \delta Z_n) dS.$$

В задаче кручения

$$\int \int \int_V \Pi dV = \frac{l}{2G} \int \int_S \left[ \left( \frac{\partial F'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F'}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy,$$

где  $l$  — длина стержня. Вычислим теперь работу вариаций поверхностных нагрузок. На нижнем основании  $z = 0$ :

$$\cos(\bar{n}, x) = \cos(\bar{n}, y) = 0; \quad \cos(\bar{n}, z) = -1;$$

$$\delta X_n = -\frac{\partial}{\partial y} \delta F'; \quad \delta Y_n = \frac{\partial}{\partial x} \delta F'; \quad \delta Z_n = 0;$$

$$u'_x = u'_y = 0; \quad u'_z = \theta \psi'(x, y),$$

и поэтому здесь работа вариаций поверхностных сил равна нулю (так же, как и на боковой поверхности стержня). На верхнем основании  $z = l$ :

$$\cos(\bar{n}, x) = \cos(\bar{n}, y) = 0; \quad \cos(\bar{n}, z) = 1;$$

$$\delta X_n = \frac{\partial}{\partial y} \delta F'; \quad \delta Y_n = -\frac{\partial}{\partial x} \delta F'; \quad \delta Z_n = 0;$$

$$u'_x = -\theta ly; \quad u'_y = \theta lx; \quad u'_z = \theta \psi'(x, y).$$

Следовательно:

$$\int_S \int (u'_x \delta X_n + \dots) dS = 2\theta l \int \int dF' dx dy - \\ - \theta l \int \int \left[ \frac{\partial}{\partial x} (x \delta F') + \frac{\partial}{\partial y} (y \delta F') \right] dx dy.$$

Преобразуя последний интеграл в интеграл по контуру  $C$ , получаем, что этот интеграл равен нулю, т. к. на контуре  $\delta F' = 0$ . Таким образом, вариационное уравнение кручения имеет вид:

$$\delta J' = \delta \int \int \left\{ \frac{1}{2G} \left[ \left( \frac{\partial F'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F'}{\partial y} \right)^2 \right] - 2\theta F' \right\} dx dy = 0. \quad (19.09)$$

III. Приложение метода Ритца. Приближенное решение полученной вариационной задачи нетрудно построить с помощью метода Ритца. Особенно просто находится „первое приближение“. Возьмем за функцию напряжений  $F'(x, y)$  некоторую функцию  $C'_1 F'_1(x, y)$ , обращающуюся в нуль на контуре и подходящим образом имитирующую прогибы мембраны, натянутой на том же контуре (см. мембранную аналогию в теории кручения), где  $C'_1$  — подлежащий определению параметр. Тогда  $I' = I'(C'_1)$  и условие экстремума  $I'$  выражается уравнением  $\frac{\partial I'(C'_1)}{\partial C'_1} = 0$ , линейным, очевидно, относительно  $C'_1$ . Разрешая это уравнение, получаем:

$$C'_1 = 2G\theta \frac{\int \int F'_1 dx dy}{\int \int \left[ \left( \frac{\partial F'_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F'_1}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy}. \quad (19.10)$$

Рассмотрим пример — *кручение стержня прямоугольного поперечного сечения* (ширина  $2b$ , высота  $2h$ ). Положим

$$F'_1 = (x^2 - b^2)(y^2 - h^2). \quad (19.11)$$

Подставляя это значение в формулу (19.10), находим:

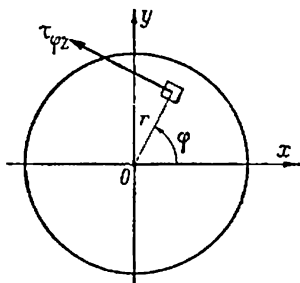
$$C'_1 = \frac{5}{4} \frac{G\theta}{b^2 + h^2}. \quad (19.12)$$

Угол кручения на единицу длины  $\theta$  связан с величиной крутящего момента  $M$  зависимостью (19.08); внося в нее найденную функцию  $F' = C_1 F'_1$  и проводя вычисления, получаем:

$$M = \frac{40}{9} \cdot \frac{b^3 h^3}{b^2 + h^2} G \theta. \quad (19.13)$$

Найденное соотношение мало отличается от точного.

IV. Кручение круглого стержня. Эта задача имеет элементарное решение; приводим его, т. к. оно потребуется нам в дальнейшем. Функция напряжений



Фиг. 37.

$$F' = \frac{M}{\pi a^2} \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right). \quad (19.14)$$

Напряжение

$$\tau_{\varphi z} = - \frac{dF'}{dr} = \frac{2M}{\pi a^4} r. \quad (19.15)$$

## § 20. Установившаяся ползучесть скручиваемого стержня

I. Основные положения. Задача об установившейся ползучести скручиваемого стержня совпадает, по существу, с задачей „обычного“ пластического кручения при произвольной зависимости между напряжениями и деформациями, если скорости  $v_x, v_y, v_z$  заменить смещениями  $u_x, u_y, u_z$ . Известно [7], что картина деформации при пластическом кручении та же, что и при упругом. Поэтому

$$v_x'' = -\omega z; \quad v_y'' = \omega z x; \quad v_z'' = \omega \psi''(xy), \quad (20.01)$$

где  $\omega$  — угловая скорость кручения на единицу длины стержня; условимся считать ее положительной. Вычисляя компоненты скорости деформации, получаем:

$$\xi_x'' = \xi_y'' = \xi_z'' = \eta_{xy}'' = 0.$$

Вследствие этого, из соотношений установившейся ползучести вытекает, что

$$\sigma_x'' = \sigma_y'' = \sigma_z'' = \tau_{xy}'' = 0$$

и отличны от нуля компоненты  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ . Интенсивность касательных напряжений

$$T = + \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}. \quad (20.02)$$

Для функции  $\psi''(x, y)$  нетрудно получить дифференциальное уравнение и соответствующее граничное условие; это уравнение нелинейное и решение его связано с большими математическими трудностями. Мы будем поэтому исходить из вариационного уравнения для функции напряжения  $F'' = F''(x, y)$ , основываясь на котором можно строить сравнительно простые приближенные решения. Компоненты напряжения

$$\tau_{xz}'' = \frac{\partial F''}{\partial y}; \quad \tau_{yz}'' = - \frac{\partial F''}{\partial x}. \quad (20.03)$$

Граничное условие для функции напряжения имеет, очевидно, вид (для односвязного контура):

$$F'' = 0. \quad (20.04)$$

Крутящий момент

$$M = 2 \iint F'' dx dy. \quad (20.05)$$

II. Вариационное уравнение. Исходим из общего вариационного уравнения (6.17):

$$\delta \iint_V \Lambda dV = \iint_S (v_x'' \delta X_n + v_y'' \delta Y_n + v_z'' \delta Z_n) dS.$$

В рассматриваемой нами задаче варьируется функция напряжений  $F''$ , причем вариация  $\delta F''$  произвольна внутри контура поперечного сечения и равна нулю на самом контуре. Нетрудно показать, подобно предыдущему (§ 19), что

$$\iint_S (v_x'' \delta X_n + \dots) dS = 2\omega l \iint \delta F'' dx dy.$$

Далее, при степенном законе  $\Lambda = \frac{2B(\infty)}{m+1} T^{m+1}$ . Следовательно, вариационное уравнение установившейся ползучести



скручиваемого стержня имеет вид:

$$\delta I'' \equiv \delta \int \int \left[ \frac{B(\infty)}{m+1} T^{m+1} - \omega F' \right] dx dy = 0, \quad (20.06)$$

причем

$$T = + \sqrt{\left( \frac{\partial F''}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F''}{\partial y} \right)^2}.$$

Из этого уравнения вытекает дифференциальное уравнение для функции напряжений  $F''(x, y)$  (уравнение Эйлера вариационной задачи (20.06)). Его можно написать сразу, пользуясь общим правилом, но нетрудно вывести это дифференциальное уравнение непосредственно. Выполняя в (20.06) варьирование, получаем:

$$\int \int \left[ 2B(\infty) T^{m-1} \left( \frac{\partial F''}{\partial x} \delta \frac{\partial F''}{\partial x} + \frac{\partial F''}{\partial y} \delta \frac{\partial F''}{\partial y} \right) - \omega \delta F'' \right] dx dy = 0,$$

но

$$T^{m-1} \left( \frac{\partial F''}{\partial x} \delta \frac{\partial F''}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( T^{m-1} \frac{\partial F''}{\partial x} \delta F'' \right) - \delta F'' \frac{\partial}{\partial x} \left( T^{m-1} \frac{\partial F''}{\partial x} \right).$$

Аналогичное соотношение имеем и для второго слагаемого  $T^{m-1} \left( \frac{\partial F''}{\partial y} \delta \frac{\partial F''}{\partial y} \right)$ . Преобразовывая теперь двойной интеграл в криволинейный, находим:

$$\begin{aligned} - \int \int \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( T^{m-1} \frac{\partial F''}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T^{m-1} \frac{\partial F''}{\partial y} \right) + \frac{\omega}{2B(\infty)} \right] \delta F'' dx dy + \\ + \frac{1}{2} \oint_C T^{m-1} \frac{\partial F''}{\partial n} \delta F'' dC = 0. \end{aligned}$$

Но на контуре  $C$  вариация  $\delta F'' = 0$ , следовательно, криволинейный интеграл равен нулю. В силу произвольности  $\delta F''$  внутри области получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T^{m-1} \frac{\partial F''}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T^{m-1} \frac{\partial F''}{\partial y} \right) + \frac{\omega}{2B(\infty)} = 0. \quad (20.07)$$

Это уравнение иным путем впервые получил Надаи [85]; оно линейно относительно производных второго порядка и принадлежит к эллиптическому типу, так как  $m \geq 1$  (на доказательстве этого мы не останавливаемся). Решение этого

уравнения известно лишь для нескольких частных случаев. Мы будем исходить из вариационного уравнения (20.06), решая его приближенно методом Ритца. Для этого положим

$$F''(x, y) = C_1'' F_1''(x, y),$$

где  $C_1''$  — подлежащий определению параметр, а  $F_1''(x, y)$  — подходящая функция; за  $F_1''(x, y)$  можно, в частности, взять  $F_1'(x, y)$ , т. к. поверхность напряжений  $F_1'' = F_1'(x, y)$  имеет, в общем, такую же форму. Теперь  $I'' = I''(C_1'')$  является функцией одного переменного  $C_1''$ ; условие экстремума  $I''$  приводит к следующему значению  $C_1''$ :

$$C_1''^m = \frac{\omega}{B(\infty)} \frac{\iint F_1'' dx dy}{\iint \left[ \left( \frac{\partial F_1''}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F_1''}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{m+1}{2}} dx dy}. \quad (20.08)$$

Заметим, что „первое приближение“ по Ритцу для получения локальных характеристик (например — напряжений в местах резкого изменения контурной кривой) ненадежно<sup>1</sup>.

III. Пример — стержень прямоугольного сечения. Положим, как и ранее (§ 19):

$$F_1'' = (x^2 - b^2)(y^2 - h^2),$$

тогда

$$\iint F_1'' dx dy = \frac{16}{9} b^3 h^3.$$

Интеграл в знаменателе (20.08) нетрудно вычислить для значений  $m = 1, 3, 5, 7, \dots$ . Положим  $\frac{m+1}{2} = p$  (целое число) и введем обозначения:

$$\int_0^b x^{2(p-j)} (x^2 - b^2)^{2j} dx = b_j; \quad \int_0^h y^{2j} (y^2 - h^2)^{2(p-j)} dy = h_j$$

$$(j = 0, 1, 2, \dots, p),$$

<sup>1</sup> Построение дальнейших приближений связано с решением системы нелинейных алгебраических уравнений.

тогда

$$\iint \left[ \left( \frac{\partial F_1''}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F_1''}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = 4p^{1/2} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} b_j h_j.$$

Для промежуточных значений  $m$  можно пользоваться интерполяцией. Крутящий момент

$$M = \frac{32}{9} b^3 h^3 C_1''.$$

IV. Стержень круглого сечения. Эта задача элементарна, т. к. для круглого стержня поперечные сечения остаются, как известно, плоскими, т. е.  $\psi''(x, y) = 0$ . Следовательно:

$$\eta_{xz}'' = -\omega y; \quad \eta_{yz}'' = \omega x.$$

Переходя к полярным координатам  $r, \varphi$ , получаем:

$$\left. \begin{aligned} \eta_{rz}'' &= 0; & \tau_{\varphi z}'' &= \omega r; & H'' &= \omega r; \\ \tau_{rz}'' &= 0; & T'' &= \tau_{\varphi z}'' \end{aligned} \right\} \quad (20.09)$$

Согласно соотношениям установившейся ползучести (6.02), имеем:

$$\tau_{\varphi z}'' = 2g(\omega^2 r^2) \omega r. \quad (20.10)$$

Угловая скорость кручения  $\omega$  определяется из условия статической эквивалентности

$$M = 4\pi\omega \int_0^a g(\omega^2 r^2) r^3 dr. \quad (20.11)$$

При степенной зависимости (6.07):

$$\tau_{\varphi z}'' = 2B^k(\infty) (\omega r)^\mu. \quad (20.12)$$

Теперь из (20.11) получаем:

$$\omega^\mu = \frac{M(3+\mu)}{4\pi B^k(\infty) a^{3+\mu}}.$$

Следовательно:

$$\tau_{\varphi z}'' = \frac{M(3+\mu)}{2\pi a^3} \left( \frac{r}{a} \right)^\mu. \quad (20.13)$$

Распределение напряжений (фиг. 38) имеет более сглаженный характер, чем для упругого тела. В рассматриваемой задаче функция напряжений

$$F'' = \frac{M(3+\mu)}{2\pi a^2} \frac{1}{1+\mu} \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^{1+\mu} \right], \quad (20.14)$$

причем

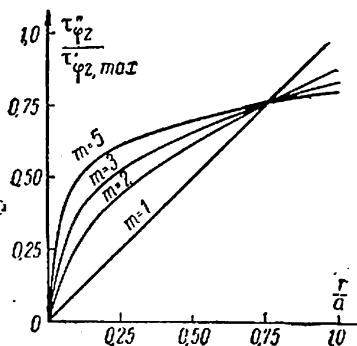
$$\tau''_{\varphi z} = - \frac{dF''}{dr}.$$

Для полого стержня (диаметры  $2a$ ;  $2b$ ,  $b > a$ ) нетрудно найти, что напряжение

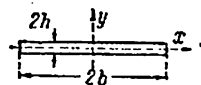
$$\tau''_{\varphi z} = \frac{M(3+\mu)}{2\pi b^3} \frac{1}{1 - \left( \frac{a}{b} \right)^{3+\mu}} \left( \frac{r}{b} \right)^\mu. \quad (20.15)$$

V. Ползучесть тонкостенных открытых профилей. В простейших случаях удается преодолеть трудности

интегрирования нелинейного уравнения (20.07). Легко получить решение задачи о скручивании стержня узкого прямоугольного сечения (фиг. 39). С помощью этого решения можно вычислить сопротивление кручению удлиненных профилей,



Фиг. 38.



Фиг. 39.

профилей, состоящих из узких прямоугольников и, вообще, различных тонкостенных незамкнутых профилей.

Для узкого прямоугольника допустимо считать, что функция напряжений  $F''$  не зависит от  $x$ . Тогда дифференциальное уравнение (20.07) принимает вид:

$$\frac{d}{dy} \left| \frac{dF''}{dy} \right|^m \pm \frac{\omega}{2B(\infty)} = 0.$$

Интегрируя это уравнение при очевидных условиях

$$\text{при } y = 0 \quad \frac{dF''}{dy} = 0,$$

$$\text{при } y = \pm h \quad F'' = 0,$$

находим

$$F'' = \left[ \frac{\omega}{2B(\infty)} \right]^{\mu} \frac{h^{1+\mu}}{1+\mu} \left[ 1 - \left( \frac{y}{h} \right)^{1+\mu} \right] \quad (y \geq 0).$$

В область отрицательных  $y$   $F''$  продолжается четным образом. Крутящий момент  $M$  и угловая скорость  $\omega$  связаны в соответствии с (20.05) соотношением

$$M = \left[ \frac{\omega}{2B(\infty)} \right]^{\mu} \frac{8bh^3 + \mu}{2 + \mu}. \quad (20.16)$$

Максимальное касательное напряжение

$$|\tau_{xz}''|_{\max} = \left| \frac{dF''}{dy} \right|_{y=h} = \left[ \frac{\omega h}{2B(\infty)} \right]^{\mu}. \quad (20.17)$$

Как уже указывалось, это решение пригодно для расчета установившейся ползучести тонкостенных открытых профилей. При этом в (20.16) вместо  $2b$  следует внести длину средней линии профиля (при  $h = \text{const}$ ); максимальное касательное напряжение вычисляется по формуле (20.17). При медленно меняющемся  $h$  нужно исходить из уравнения (20.05).

VI. Обобщение теоремы Бредта. Пользуясь формулами (20.01) и условием однозначности скоростей, получаем:

$$I^* \equiv \oint_{C^*} \eta_{xz}'' dx + \eta_{yz}'' dy = 2\omega \Sigma^*,$$

где  $\Sigma^*$  — площадь, ограниченная замкнутой кривой  $C^*$ , лежащей в сечении стержня. Так как

$$\eta_{xz} = 2f(T^2) \frac{\partial F''}{\partial y}; \quad \eta_{yz} = -2f(T^2) \frac{\partial F''}{\partial x},$$

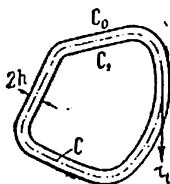
то с другой стороны

$$I^* = -2 \oint_{C^*} f(T^2) \frac{\partial F''}{\partial n} dC^*,$$

следовательно:

$$\oint_{C^*} f(T^2) \frac{\partial F''}{\partial n} dC^* = -\omega \Sigma^*. \quad (20.18)$$

VII. Ползучесть тонкостенных замкнутых профилей. Ограничимся рассмотрением двусвязной области (фиг. 40). На контурах  $C_0$  и  $C_1$  функция напряжений  $F''$  постоянна. Основываясь на малости толщины трубы  $2h$ , принимаем, что  $F''$  меняется линейно от  $F'' = F_1''$  на внутреннем контуре до  $F'' = 0$  — на внешнем (см. [7], гл. IV). Тогда



Фиг. 40.

$$M \approx 2F_1'' \Sigma, \quad (20.19)$$

где  $\Sigma$  — площадь, ограниченная кривой  $C$ , проходящей посередине между  $C_0$  и  $C_1$ . Далее, мы имеем:

$$\frac{\partial F''}{\partial n} \approx -\frac{F_1''}{2h}; \quad T^2 \approx \left(\frac{F_1''}{2h}\right)^2.$$

По теореме (20.18) получаем (при степенной зависимости):

$$B(\infty) \left| \frac{F_1''}{2} \right|^m \oint_C \frac{dC}{h^m} = \omega \Sigma. \quad (20.20)$$

Из уравнений (20.19), (20.20) находим  $F_1''$  и  $\omega$ . Тангенциальная слагающая напряжения, как и при упругом кручении, равна

$$\tau_t = \frac{M}{4h \Sigma}.$$

VIII. В заключение заметим, что для величины крутящего момента, соответствующего данной скорости углового кручения, можно указать двустороннюю оценку подобно тому как это сделано в теории малых упруго-пластических деформаций. За подробностями отсылаем читателя к книге автора [7], гл. IV.

## § 21. Неустановившаяся ползучесть скручиваемого стержня. Релаксация

I. Неустановившаяся ползучесть при постоянном крутящем моменте. Ищем решение задачи о неустановившемся кручении в виде:

$$F = F' - \tau(t)(F'' - F'), \quad (21.01)$$

где  $\tau(t)$  — неизвестная функция времени. Очевидно, что функция напряжений  $F = F(x, y)$  удовлетворяет условию  $F = 0$  на контуре и условию статической эквивалентности

$$M = 2 \iint F dx dy. \quad (21.02)$$

Воспользуемся общим решением, полученным в § 9. В нашем случае

$$P(\tau) = -l \iint f_1(T^2) \frac{\partial T^2}{\partial \tau} dx dy;$$

$$\frac{d^2 \bar{\Pi}}{d\tau^2} = \frac{l}{G} \iint \tilde{T}^2 dx dy,$$

причем  $P(1) = 0$ ,  $\frac{dP}{d\tau} < 0$ , а

$$\tilde{T}^2 = \left( \frac{\partial F''}{\partial x} - \frac{\partial F'}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial F''}{\partial y} - \frac{\partial F'}{\partial x} \right)^2.$$

При степенном законе

$$P(\tau) = -\frac{2l}{m+1} \frac{d}{d\tau} \iint T^{m+1} dx dy. \quad (21.03)$$

Функция  $\tau(t)$  определяется соотношением

$$G\Omega(t) = l \iint \tilde{T}^2 dx dy \int_0^{\tau} \frac{d\tau}{P(\tau)}. \quad (21.04)$$

II. Пример — неустановившаяся ползучесть круглого стержня. Функции напряжений  $F'$  и  $F''$  для круглого стержня даны формулами (19.14) и (20.14). Введем безразмерные величины:

$$\zeta = \frac{r}{a}; \quad x_2 = \frac{3+\mu}{4} \leq 1; \quad Y_2 = x_2 \zeta^\mu - \zeta; \quad (21.05)$$

$$t_2^* = 64 G\Omega(t) \frac{1+\mu}{(1-\mu)^2} \left( \frac{2M}{\pi a^3} \right)^{m-1};$$

$$P_2(\tau) = - \int_0^1 (\zeta + \tau Y_2)^m Y_2 \zeta d\zeta,$$

Тогда

$$T = \frac{2M}{\pi a^3} (\zeta + \tau Y_2); \quad \tilde{T} = \frac{2M}{\pi a^3} Y_2;$$

$$l \iint \tilde{T}^2 dx dy = 2\pi a^2 l \left( \frac{2M}{\pi a^3} \right)^2 \int_0^1 Y_2^2 \zeta d\zeta = 2\pi a^2 l \left( \frac{2M}{\pi a^3} \right)^2 \frac{(\mu-1)^2}{32(\mu+1)},$$

и решение (21.04) приобретает вид:

$$t_2^* = \int_0^{\tau} \frac{d\tau}{P_2(\tau)}. \quad (21.06)$$

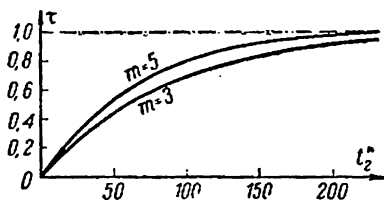
При  $m$  целом  $P_2(\tau)$  — полином степени  $m$ . Например, при  $m=3$ :

$$P(\tau) = \frac{1}{96} (1-\tau) \left( 1 + \frac{1}{7} \tau + \frac{1}{21} \tau^2 \right);$$

при  $m=5$ :

$$P(\tau) = \frac{1}{72} (1-\tau) \left( 1 + \frac{6}{35} \tau^2 + \frac{8}{175} \tau^3 + \frac{51}{4375} \tau^4 \right).$$

На фиг. 41 показаны кривые  $\tau = \tau(t_2^*)$ , вычисленные по уравнению (21.06) для  $m=3$ ; 5. Приемы вычисления кривых  $\tau$  обсуждались в § 9.



Фиг. 41.

III. Релаксация крутящего момента. Пусть в начальный момент времени  $t=0$  стержень был закручен моментом  $M_0$ , а затем верхнее основание стержня  $z=l$  было закреплено. С течением вре-

мени момент  $M=M(t)$  будет уменьшаться по величине. Ищем решение поставленной задачи в виде:

$$F = \rho(t) F'(x, y). \quad (21.07)$$

Для  $\rho(t)$  мы получим, очевидно, прежнее решение (§ 10):

$$t^* = \frac{1}{m-1} (\rho^{1-m} - 1),$$



где  $t^* = x\Omega(t)$ ; в рассматриваемой задаче:

$$\alpha = 2G \frac{\iint \left[ \left( \frac{\partial F'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F'}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{m+1}{2}} dx dy}{\iint \left[ \left( \frac{\partial F'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F'}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy}. \quad (21.08)$$

Согласно соотношению (21.02), находим:

$$\frac{M}{M_0} = \gamma(t^*). \quad (21.09)$$

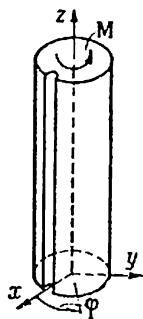
Для круглого стержня

$$\alpha = G \frac{m+3}{2} \left( \frac{\pi a^3}{2M_0} \right)^{m-1}. \quad (21.10)$$

## § 22. Концентрация напряжений, вызванная мелким пазом на поверхности скручиваемого стержня

1. Основные положения. Концентрация напряжений, вызываемая резкими локальными изменениями формы тела, имеет большое значение для оценки прочности в состоянии ползучести. Здесь мы рассмотрим концентрацию напряжений, вызванную мелким продольным пазом на поверхности скручиваемого круглого стержня. Полученные результаты, однако, распространяемы на другие формы поперечного сечения и на случай кольцевой выточки. Заметим, что ниже рассматривается состояние установившейся ползучести.

В задаче кручения стержня с сечением, близким к круговому, удобно исходить из уравнений, отнесенных к полярным координатам  $\zeta, \varphi$ , где  $\zeta = \frac{r}{a}$  — безразмерный радиус-вектор,  $a$  — характерный размер стержня,  $\varphi$  — полярный угол. В такой системе координат (в этом параграфе мы опускаем штрихи):



Фиг. 42.

$$\tau_{rz} = \frac{1}{a} \frac{1}{\zeta} \frac{\partial F}{\partial \varphi}; \quad \tau_{\varphi z} = -\frac{1}{a} \frac{\partial F}{\partial \zeta}, \quad (22.01)$$

а квадрат интенсивности касательных напряжений

$$T^2 = \frac{1}{a^2} \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial \zeta} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right)^2 \frac{1}{\zeta^2} \right]. \quad (22.02)$$

Дифференциальное уравнение кручения в новых координатах проще всего получить, исходя из вариационного принципа и пользуясь инвариантностью уравнения Эйлера. Преобразуя функционал в (20.06) к полярным координатам

$$\delta \int \int \left[ \frac{B(\infty)}{m+1} T^{m+1} - \omega F \right] r dr d\varphi = 0$$

и составляя уравнение Эйлера, получаем:

$$K(F) \equiv \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \zeta T^{m-1} \frac{\partial F}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\zeta} T^{m-1} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) + \frac{\omega a^2}{2B(\infty)} \zeta = 0. \quad (22.03)$$

II. Кручение круглого стержня было рассмотрено выше (§ 20). Функция напряжений (отличаем ее здесь нулевым индексом):

$$F_0 = \frac{\alpha \tau_{\max}}{1+\mu} (1 - \zeta^{1+\mu}), \quad (22.04)$$

где положено (см. § 20):

$$\tau_{\max} = \frac{(3+\mu) M}{2\pi a^3}. \quad (22.05)$$

III. Кручение стержня с сечением, близким к круговому. Пусть уравнение контура сечения имеет вид:

$$\zeta = 1 + \lambda \psi(\varphi), \quad (22.06)$$

где  $\lambda \geq 0$  — малый безразмерный параметр, а  $\psi(\varphi)$  — непрерывная периодическая функция, причем  $|\psi(\varphi)| \leq 1$ . Воспользовавшись малостью параметра  $\lambda$ , можно линеаризовать задачу, сведя ее к ряду линейных задач. Считая  $\lambda$  достаточно малым, ограничиваемся первым приближением и разыскиваем решение уравнения (22.03) в виде:

$$F(\zeta, \varphi) = F_0(\zeta) + \lambda \Phi(\zeta, \varphi), \quad (22.07)$$

где  $\Phi = \Phi(\zeta, \varphi)$  — новая неизвестная функция. Внося (22.07) в дифференциальное уравнение (22.03), разлагая  $K(F)$  в ряд

по степеням  $\lambda$  и отбрасывая члены разложения степени выше первой, получаем:

$$K(F_0) + \lambda \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} K(F) \right]_{\lambda=0} = 0,$$

но  $K(F_0) = 0$ , следовательно:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} K(F) \right]_{\lambda=0} = 0.$$

Проведя вычисления, находим:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + m^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} + m^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + m(m-1) \tau^2 \frac{\frac{d^2 F_0}{d\tau^2}}{\frac{dF_0}{d\tau}} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = 0.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$m^2 \frac{\frac{d^2 F_0}{d\tau^2}}{\frac{dF_0}{d\tau}} = 1.$$

Таким образом,  $\Phi(\zeta, \varphi)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(2m-1)\zeta \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + m^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (22.08)$$

Рассмотрим теперь условия на контуре. Мы имеем:

$$\text{при } \zeta = 1 + \lambda \psi(\varphi) \quad F_0(\zeta) + \lambda \Phi(\zeta, \varphi) = 0.$$

Разлагая значения  $F_0(\zeta)$  и  $\Phi(\zeta, \varphi)$  на контуре в ряд по степеням  $\lambda$ , получаем:

$$F_0(1) + \lambda \left[ \left( \frac{\partial F_0}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=1} \psi(\varphi) + \Phi(1, \varphi) \right] + \dots = 0,$$

но

$$F_0(1) = 0; \quad \left( \frac{\partial F_0}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=1} = -\alpha \tau_{\max}.$$

Следовательно, функция  $\Phi(\zeta, \varphi)$  должна удовлетворять граничному условию

$$\text{при } \zeta = 1 \quad \Phi(\zeta, \varphi) = \alpha \tau_{\max} \psi(\varphi). \quad (22.09)$$

Наконец, условие статической эквивалентности имеет вид:

$$\frac{M}{2a^2} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1+\lambda\psi(\varphi)} F_0(\zeta) \zeta d\zeta + \lambda \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1+\lambda\psi(\varphi)} \Phi(\zeta, \varphi) \zeta d\zeta,$$

но с точностью до  $\lambda^2$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{1+\lambda\psi(\varphi)} F_0(\zeta) \zeta d\zeta &= \int_0^1 F_0(\zeta) \zeta d\zeta + \lambda\psi(\varphi) F_0(1); \\ \int_0^{1+\lambda\psi(\varphi)} \Phi(\zeta, \varphi) \zeta d\zeta &= \int_0^1 \Phi(\zeta, \varphi) \zeta d\zeta + \lambda\psi(\varphi) \Phi(1, \varphi). \end{aligned}$$

Кроме того:

$$F_0(1) = 0; \quad \frac{M}{2a^2} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 F_0(\zeta) \zeta d\zeta.$$

Таким образом, условие статической эквивалентности сводится к требованию

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \Phi(\zeta, \varphi) \zeta d\zeta = 0. \quad (22.10)$$

Будем искать решения уравнения (22.08) вида:

$$R(\zeta) \cos n\varphi, \quad R(\zeta) \sin n\varphi, \quad (22.11)$$

где  $n > 0$  — целое число, а  $R(\zeta)$  — неизвестная функция. Легко находим, что

$$\frac{d^2 R}{d\zeta^2} + \frac{2-\mu}{\zeta} \frac{dR}{d\zeta} - \frac{\nu n^2}{\zeta^2} R = 0. \quad (22.12)$$

Это уравнение имеет решение

$$R(\zeta) = C_n \zeta^{x_n} + C'_n \zeta^{x'_n},$$

где  $C_n, C'_n$  — произвольные постоянные, а

$$x_n, x'_n = -\frac{1-\mu}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^2 + \mu n^2}. \quad (22.13)$$

Очевидно, что  $x'_n < 0$ ; т. к. при  $\zeta = 0$  напряжения должны быть ограниченными, то следует положить  $C'_n = 0$ . По той же причине следует отбросить все решения, для которых

$$z_n < 1. \quad (22.14)$$

Заметим, что при выборе решений в форме (22.11) условие статической эквивалентности (22.10) удовлетворяется. Так как в дальнейшем мы будем пользоваться представлением

$$\psi(\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \quad (22.15)$$

где  $a_0$ ,  $a_n$ ,  $b_n$  — коэффициенты Фурье, то нам потребуется решение, отвечающее постоянному члену  $a_0$  ряда (22.15); такое решение может быть получено непосредственно из формул (22.04), (22.05), если вместо  $a$  подставить  $a(1 + a_0\lambda)$  и в разложении по  $\lambda$  отбросить все члены, содержащие  $\lambda$  в степенях выше первой. Приводим окончательные результаты, не останавливаясь на выкладках:

$$a_0\Phi_0(\zeta) = -\frac{2a_0a\tau_{\max}}{1+\mu} \left(1 - \frac{3+\mu}{2}\zeta^{1+\mu}\right). \quad (22.16)$$

Если  $\mu = 1$  (этот случай соответствует упругой среде Гука, если перейти от скоростей к смещениям), то полученные решения позволяют удовлетворить граничному условию (22.09), в котором функция  $\psi(\varphi)$  задана некоторым рядом Фурье. В общем же случае  $\mu < 1$  построенное решение не будет содержать первых членов ряда Фурье (число их определяется условием  $x_n \geq 1$ ) и, следовательно, произвольному граничному условию удовлетворить нельзя. Можно, однако, рассматривать различные частные задачи, интересные для приложений. Остановимся здесь на задаче о концентрации напряжений, вызванной мелким продольным пазом на поверхности скручиваемого стержня.

IV. Кручение круглого стержня с продольным пазом. Пусть

$$\psi(\varphi) = -\left(\cos^2 \frac{n\varphi}{2}\right)^q, \quad (22.17)$$

где  $p, q$  — целые числа;  $q$  будем считать большим числом, так что  $\psi(\varphi)$  отлочно от нуля практически только вблизи точек  $\varphi = 0, \pm \frac{2\pi}{p}, \pm \frac{4\pi}{p}, \dots$ . Вычисляя величину безраз-

мерного радиуса кривизны  $\rho_k$  кривой (22.06) при  $\varphi = 0$ , получаем:

$$\rho_k = \left| \frac{1 - 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3}{1 - 2\lambda + \lambda^2 - \frac{1}{2} p^2 q \lambda (1 - \lambda)} \right|.$$

Нас интересует случай мелкой, но резкой впадины (фиг. 43), поэтому нужно считать  $\frac{1}{2} p^2 q \lambda \gg 1$ ; тогда

$$\rho_k \approx \frac{2}{p^2 q \lambda}, \text{ т. е. } q \sim \frac{2}{p^2 \rho_k \lambda}. \quad (22.18)$$

Таким образом, мы имеем задачу о кручении круглого стержня с  $p$  малыми продольными пазами; число  $p$  мы выберем в дальнейшем. В высшей алгебре доказывается, что функцию (22.17) можно представить суммой

$$-\cos^{2q} \frac{p\varphi}{2} = -\frac{1}{2^{2q}} \binom{2q}{q} - \frac{1}{2^{2q-1}} \sum_{n=1}^q \binom{2q}{q-n} \cos np\varphi, \quad (22.19)$$

где, как обычно, обозначено

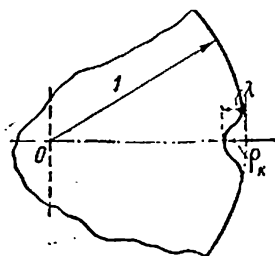
$$\binom{2q}{n} = \frac{(2q)!}{n! (2q-n)!}.$$

Число  $p$  выбираем так, чтобы удовлетворялось условие  $x_{np} \gg 1$ . Сопоставляя (22.19) и построенные решения, согласно граничному условию (22.09), получаем

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta, \varphi) = & -\frac{1}{2^{2q}} \binom{2q}{q} \Phi_0(\zeta) - \\ & - \frac{a_{\tau \max}}{2^{2q-1}} \sum_{n=1}^q \binom{2q}{q-n} \zeta^{x_{np}} \cos np\varphi, \end{aligned} \quad (22.20)$$

где

$$x_{np} = \sqrt{\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^2 + \mu p^2 n^2} - \frac{1-\mu}{2}. \quad (22.21)$$



Фиг. 43.

Вычислим теперь напряжения  $\tau_{rz}^1$ ,  $\tau_{\varphi z}^1$ , соответствующие найденному решению  $\lambda\Phi(\zeta, \varphi)$ , на дне паза, т. е. при  $\varphi = 0$ ,  $\zeta = 1 - \lambda$ . Согласно формулам (22.01), (22.20), (22.16), находим:

$$\begin{aligned}\tau_{rz}^1 &= 0; \\ \tau_{\varphi z}^1 &= \frac{1}{2^{2q}} \binom{2q}{q} 3\lambda\tau_{\max} + \frac{\lambda\tau_{\max}}{2^{2q-1}} \sum_{n=1}^q \binom{2q}{q-n} x_{np}. \quad (22.22)\end{aligned}$$

Рассмотрим  $x_{np}$ ; т. к.  $0 < \mu \leq 1$ , то  $\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^2 < \frac{1}{4}$ , следовательно, взяв достаточно большое  $p$ , чтобы

$$\mu p^2 \gg \left(\frac{1-\mu}{2}\right)^2,$$

получим:

$$x_{np} \approx np \sqrt{\mu - \frac{1-\mu}{2}}.$$

Таким образом:

$$\tau_{\varphi z}^1 = \frac{1}{2^{2q}} \binom{2q}{q} 3\lambda\tau_{\max} - \lambda\tau_{\max} \frac{1-\mu}{2} S_1 + \lambda\tau_{\max} p \sqrt{\mu} S_2,$$

где введены обозначения:

$$S_1 = \frac{1}{2^{2q-1}} \sum_{n=1}^q \binom{2q}{q-n}; \quad S_2 = \frac{1}{2^{2q-1}} \sum_{n=1}^q n \binom{2q}{q-n}.$$

Первая сумма легко вычисляется, если в (22.19) положить  $\varphi = 0$ :

$$S_1 = 1 - \frac{1}{2^{2q}} \binom{2q}{q} > 0. \quad (22.23)$$

Вычислим вторую сумму; рассмотрим наряду с функцией  $-\psi(\varphi) = \cos^2 q \varphi \frac{\varphi}{2}$ , представленной тригонометрической

суммой (22.19), другую функцию:

$$\begin{aligned}\chi(\varphi) &\equiv q \cos qp\varphi + \frac{q \sin(2q-1)\frac{p\varphi}{2}}{2 \sin \frac{p\varphi}{2}} - \frac{\sin^2 q \frac{p\varphi}{2}}{2 \sin^2 \frac{p\varphi}{2}} = \\ &= \sum_{n=1}^q n \cos pn\varphi.\end{aligned}$$

Каждое слагаемое суммы  $S_2$  является произведением соответствующих коэффициентов разложений функций  $\psi(\varphi)$  и  $\chi(\varphi)$ ; тогда в силу обобщенного равенства Парсеваля, доказываемого в теории тригонометрических рядов, получаем:

$$S_2 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^{2q} x \left[ q \cos 2qx + \frac{q \sin(2q-1)x}{2 \sin x} - \frac{\sin^2 qx}{2 \sin^2 x} \right] dx,$$

где положено  $x = \frac{p\varphi}{2}$ ; здесь первый интеграл равен [20]:

$$S'_2 \equiv \frac{4q}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^{2q} x \cos 2qx dx = \frac{2q}{2^q}.$$

Второй интеграл легко преобразуется к виду:

$$S''_2 = -\frac{1}{2} S'_2 + \frac{2p}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^{2q} x \sin 2qx \operatorname{ctg} x dx.$$

Но при большом  $q$  с достаточной точностью

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2q} x \sin 2qx \operatorname{ctg} x dx \approx \int_0^{\pi/2} \cos^{2q-2} x \sin 2qx \operatorname{ctg} x dx = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом:

$$S'_2 + S''_2 \cong q,$$



т. к.  $\frac{q}{2q}$  — очень малое число. Третий интеграл представим в виде:

$$S_2''' = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left( \frac{\sin qx}{\sin x} \right)^2 dx - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 qx - 1}{\sin^2 x} dx - \\ - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 qx - 1}{\sin^2 x} \left( \sin^2 qx - \frac{1}{2} \right) dx.$$

Здесь первый интеграл в правой части (интеграл Фейера) равен  $-q$ ; далее, второй интеграл вычисляется (посредством разложения подинтегральной функции в тригонометрическую сумму) и равен  $\frac{q}{2^{2q}} \binom{2q}{q}$ . Наконец, в последнем интеграле подинтегральная функция является произведением ограниченной монотонно убывающей (по модулю) функции  $\frac{\cos^2 qx - 1}{\sin^2 x}$  на сильно колеблющуюся знакопеременную функцию  $\sin^2 qx - \frac{1}{2}$ ; поэтому величина этого интеграла относительно мала. Его можно оценить довольно точно, однако за недостатком места мы на этом не останавливаемся и ограничимся замечанием, что уже грубая оценка показывает, что рассматриваемый интеграл по модулю значительно меньше единицы и, следовательно, им можно пренебречь, т. к. остальные слагаемые в  $S_2'''$  велики (напомним, что  $q$  — большое число). Используя приближенную формулу для факториала [21]:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n},$$

справедливую при большом  $n$ , находим

$$\frac{1}{2^{2q}} \binom{2q}{q} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi q}},$$

следовательно,

$$S_2 \approx \sqrt{\frac{q}{\pi}}.$$

В силу соотношения (22.18)  $\sqrt{\frac{q}{\pi}} = \frac{1}{p} \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda \rho_k}}$ ; так как удерживается лишь первая степень  $\lambda$ , то при  $\rho_k$ , имеющем порядок  $\lambda$ :

$$\tau_{\varphi z}^1 = \tau_{\max} \left( 0,8 \sqrt{\frac{\lambda}{m \rho_k}} - \lambda \frac{1-\mu}{2} \right),$$

причем вторым слагаемым в скобке можно пренебречь. Присоединяя основное решение (22.05), получаем окончательную формулу

$$\tau_{\varphi z, \max} = \tau_{\max} \left( 1 + 0,8 \sqrt{\frac{\lambda}{m \rho_k}} \right). \quad (22.24)$$

Результат не зависит от числа пазов  $p$ , так как возмущения, вносимые малым пазом, ощутительны лишь вблизи последнего. Заметим, что для случая упругого стержня (при  $m=1$ ) Нейбер [18], пользуясь совершенно другим методом, получил формулу:

$$\tau_{\varphi z, \max} = \tau_{\max} \left( 1 + \sqrt{\frac{\lambda}{\rho_k}} \right).$$

Сопоставляя последние формулы, мы заключаем, что построенное нами первое приближение несколько сглаживает распределение напряжений. Основываясь на этом, можно для технических приложений рекомендовать следующую формулу для определения концентрации напряжений в состоянии ползучести:

$$T_{\max} = \tau_{\varphi z, \max} = \tau_{\max} \left( 1 + \sqrt{\frac{\lambda}{m \rho_k}} \right). \quad (22.25)$$

Так как  $m > 1$ , то концентрация напряжений при ползучести ниже, чем для упругого тела.

V. В заключение, остановимся на нескольких замечаниях. Концентрация напряжений у малого паза зависит от напряжения  $\tau_{\max}$ , которое имело бы место, если бы паза не было. Поэтому полученное решение (22.25) пригодно и для определения концентрации напряжений, вызванной мелким продольным пазом на поверхности стержня произвольного профиля; нужно лишь взять соответствующее значение  $\tau_{\max}$ .

Далее, функция напряжений  $(F\zeta, \varphi) = F_0(\zeta) + \lambda \Phi(\zeta, \varphi)$  нам известна, и по общему методу (§ 9) можно *приблизленно* найти изменение во времени напряженного состояния вблизи

паза (от начального упругого к конечному установившемуся) и вычислить при помощи уравнений ползучести (3.24) общую деформацию ползучести у паза. Так как  $\lambda$  — малая величина, то для определения функции  $\tau(t)$  можно в первом приближении не обращать внимания на наличие паза. В частности, для круглого стержня можно воспользоваться кривыми, приведенными на фиг. 41.

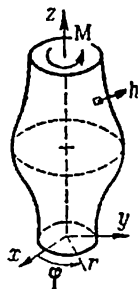


Фиг. 44.

Найденное значение концентрации напряжений характерно, очевидно, для состояния чистого сдвига. Следовательно, формула (22.25) справедлива и для мелкой кольцевой выточки на поверхности круглого скручиваемого стержня (фиг. 44); это будет показано ниже (§ 23).

### § 23. Кручение круглых стержней переменного диаметра

В этом параграфе мы кратко рассмотрим ползучесть скручиваемых круглых стержней переменного диаметра. Пусть нижнее сечение стержня закреплено, а верхнее испытывает действие момента  $M$  (фиг. 45). Направим ось  $z$  цилиндрических координат  $r, \varphi, z$  по оси стержня, а плоскость  $z = 0$  совместим с нижним сечением стержня (верхнее сечение  $z = l_1$ ).



Фиг. 45.

1. Упругое кручение (при  $t = 0$ ). При упругом кручении поперечные сечения остаются, как известно, плоскими, но радиусы искривляются, т. е.

$$u'_r = u'_z = 0; \quad u'_\varphi = u'_\varphi(r, z).$$

Тогда компоненты деформации  $\epsilon'_r = \epsilon'_z = \epsilon'_z = \gamma'_{rz} = 0$ , а

$$\gamma'_{r\varphi} = r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u}{r} \right); \quad \gamma'_{z\varphi} = r \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{u}{r} \right),$$

где введено обозначение  $u'_\varphi \equiv u$ . Далее, вследствие закона Гука  $\sigma'_r = \sigma'_\varphi = \sigma'_z = \tau'_{rz} = 0$ . Отличные от нуля напряжения  $\tau'_{r\varphi}, \tau'_{\varphi z}$  должны удовлетворять дифференциальному уравне-

нию равновесия (см. уравнения равновесия в цилиндрических координатах):

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \tau_{r\varphi}) + \frac{\partial}{\partial z}(r^2 \tau_{\varphi z}) = 0. \quad (23.01)$$

Этому уравнению можно удовлетворить, введя функцию напряжений  $F' = F'(r, z)$ :

$$r^2 \tau'_{r\varphi} = -\frac{\partial F'}{\partial z}; \quad r^2 \tau'_{\varphi z} = \frac{\partial F'}{\partial r}.$$

Боковая поверхность стержня свободна от напряжений; основываясь на этом, легко найти (т. к. от нуля отличны лишь напряжения  $\tau'_{r\varphi}$ ,  $\tau'_{\varphi z}$  и  $\cos(n, \varphi) = 0$ , где  $n$  — нормаль к поверхности стержня), что на боковой поверхности ( $s$  — длина дуги контура меридионального сечения):

$$\frac{\partial F'}{\partial s} = 0 \quad \text{или} \quad F' = \text{const.} \quad (23.02)$$

Скручивающий момент в каком-либо сечении  $z = \text{const}$ :

$$M = 2\pi \int \tau'_{\varphi z} r^2 dr = 2\pi [F'(r_2, z) - F'(r_1, z)], \quad (23.03)$$

где  $r_1$ ,  $r_2$  — соответственно внутренний и наружный радиусы сечения (в случае полого вала). Так как аддитивная постоянная в функции напряжений не влияет на распределение напряжений, то всегда можно принимать, что  $F'(r_2, z) = 0$ . Из закона Гука и условия совместности деформаций  $\gamma'_{r\varphi}$  и  $\gamma'_{\varphi z}$  вытекает дифференциальное уравнение для функции напряжений:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^3} \frac{\partial F'}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r^3} \frac{\partial F'}{\partial z} \right) = 0. \quad (23.04)$$

Предельным условиям на концах стержня  $z = 0$ ,  $l_1$  обычно удовлетворяют в смысле принципа Сен-Венана.

II. Установившаяся ползучесть. Картина деформации при установившейся ползучести в общем аналогична картине деформации при упругом кручении: поперечные сечения остаются плоскими, но радиусы искривляются, т. е.

$$v''_r = v''_z = 0; \quad v''_{\varphi} = v''_{\varphi}(r, z).$$

Компоненты скорости деформации  $\xi_r'' = \xi_\varphi'' = \xi_z'' = \eta_{rz}'' = 0$

и

$$\eta_{r\varphi}'' = r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \right); \quad \eta_{\varphi z}'' = r \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v}{r} \right), \quad (23.05)$$

где введено обозначение  $v'' \equiv v$ . В силу соотношений установившейся ползучести (6.02) отличны от нуля только компоненты напряжения  $\tau_{r\varphi}''$ ,  $\tau_{\varphi z}''$ , которые должны удовлетворять дифференциальному уравнению равновесия (23.01); подобно предыдущему, вводим функцию напряжений  $F'' = F''(r, z)$ ,

$$r^2 \tau_{\varphi z}'' = - \frac{\partial F''}{\partial z}; \quad r^2 \tau_{r\varphi}'' = - \frac{\partial F''}{\partial r}. \quad (23.06)$$

Ниже мы останавливаемся лишь на случае сплошного стержня; тогда  $r_1 = 0$  и на боковой поверхности

$$F'' = 0, \quad (23.07)$$

и крутящий момент

$$M = -2\pi F''(0, z). \quad (23.08)$$

Интенсивность касательных напряжений

$$T^2 = \frac{1}{r^4} \left[ \left( \frac{\partial F''}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial F''}{\partial z} \right)^2 \right]. \quad (23.09)$$

Дифференциальное уравнение для функции напряжений  $F''$  можно получить из соотношений установившейся ползучести (6.01) и условия совместности скоростей деформации  $\eta_{r\varphi}''$  и  $\eta_{\varphi z}''$ . Мы, однако, будем исходить из вариационного уравнения, которое само по себе полезно для построения приближенных решений.

В рассматриваемой задаче вариации напряжений  $\delta \sigma_r'' = \delta \sigma_\varphi'' = \delta \sigma_z'' = \delta \tau_{rz}'' = 0$ , а:

$$\delta \tau_{r\varphi}'' = - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \delta F''; \quad \delta \tau_{\varphi z}'' = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \delta F''.$$

Вариационное уравнение (6.17) принимает тогда вид (интегрирование по  $\varphi$  выполняется):

$$\delta \int \int \Delta r dr dz = \int_{z=l_1} v \delta \tau_{\varphi z}'' r dr - \int_{z=0} v \delta \tau_{r\varphi}'' r dr, \quad (23.10)$$

где  $\delta \bar{\tau}_{\varphi z}$  означает вариацию касательного напряжения  $\tau_{\varphi z}$  в сечениях  $z = l_1, 0$ . Если в этих сечениях задана скорость  $v$ , то вариация  $\delta \bar{\tau}_{\varphi z}$ , а следовательно, и вариация  $\delta F''$  произвольна в этих сечениях. Если же задано касательное напряжение  $\tau_{\varphi z}$ , то  $\delta \bar{\tau}_{\varphi z} = 0$  при  $z = 0, l_1$ ; в этом случае

$$\delta \int \int \Lambda r dr dz = 0. \quad (23.11)$$

Так как напряжения  $\bar{\tau}_{\varphi z}$  на основаниях  $z = 0, z = l_1$  мы полагаем известными, то интегрирование соотношений

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial F''}{\partial r} = \bar{\tau}_{\varphi z} \quad \text{при } z = 0, z = l$$

определяет функцию  $F''$  на основаниях. Таким образом,  $F''$  следует считать заданным на всей поверхности стержня, поэтому на всей поверхности стержня  $\delta F'' = 0$ . Нетрудно убедиться в том, что уравнением Эйлера вариационной задачи (23.10), (23.11) является дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ f(T^2) \frac{1}{r^3} \frac{\partial F''}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ f(T^2) \frac{1}{r^3} \frac{\partial F''}{\partial z} \right] = 0. \quad (23.12)$$

Это уравнение относится к уравнениям Монжа — Ампера эллиптического типа; действительно, вычисляя обычным путем дискриминант  $D$  (см. напр., Гурса, Курс математического анализа, т. II) и предполагая, что  $T \neq \text{const}$ , получаем:

$$D = - \frac{1}{4r^6} \frac{H''}{T} \frac{dH''}{dT} < 0,$$

т. е. для реальных материалов  $\frac{dH''}{dT} > 0$ ; следовательно, уравнение (23.12) имеет лишь мнимые характеристики.

Вернемся к условиям на торцах стержня  $z = 0, z = l_1$ ; здесь задана функция напряжений  $F'' = F''(r)$ . Для длинных стержней этому условию можно обычно удовлетворять интегрально, заменяя его по принципу Сен-Венана условием статической эквивалентности (23.08).

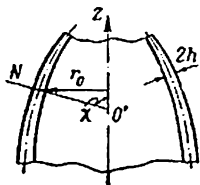
III. Установившаяся ползучесть тонкостенного полого вала переменного диаметра. Распределение напряжений в таком стержне не зависит от материала,

В самом деле, пусть  $r_0 = r_0(z)$  — радиус срединной поверхности вала,  $2h = 2h(z)$  — толщина стенки по нормали к срединной поверхности. Вследствие малости толщины  $2h$  сравнительно с другими измерениями стержня можно полагать, что  $F''$  меняется линейно по толщине оболочки от  $F'' = 0$  на наружной поверхности до  $F'' = C$  на внутренней поверхности и не зависит от  $z$ . Тогда

$$\tau''_{rz} = 0; \quad \tau''_{\varphi z} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial F''}{\partial r}.$$

Согласно условию статической эквивалентности:

$$C = -\frac{M}{2\pi}.$$



Фиг. 46.

Касательное напряжение в нормальном сечении  $O'N$  (фиг. 46) равно

$$\tau_N = \frac{M}{4\pi r_0^2 h}, \quad (23.13)$$

а напряжение

$$\tau''_{\varphi z} = \tau_N \sin \chi. \quad (23.14)$$

Компоненты скорости деформации находятся согласно закону ползучести.

IV. Кручение круглого стержня, близкого к цилиндрическому. Интегрирование нелинейного уравнения (23.12) для стержня произвольного очертания связано с большими математическими трудностями. В случае стержня, форма которого не сильно отличается от цилиндрической, задача линейризуется и допускает интересные решения.

*Постановка задачи.* Выберем некоторый цилиндр, близкий к рассматриваемому стержню, и примем его радиус за характерный размер  $a$ ; введем безразмерные координаты:

$$\rho = \frac{r}{a}, \quad \zeta = \frac{z}{a}, \quad \varphi = \varphi.$$

Пусть  $2l = \frac{l_1}{a}$  есть безразмерная длина стержня. Начало системы координат возьмем в среднем его сечении (фиг. 47).

Уравнение поверхности стержня зададим в форме:

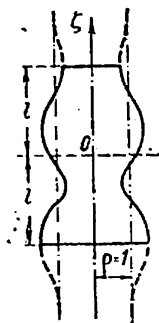
$$\rho = 1 + \lambda \psi(\zeta), \quad |\psi(\zeta)| \leq 1, \quad (23.15)$$

где  $\lambda \geq 0$  — малый безразмерный параметр, а  $\psi(\zeta)$  — непрерывная функция в интервале  $(-l \leq \zeta \leq l)$ . Для простоты ограничимся рассмотрением сплошного стержня (случай полого стержня кратко обсуждается ниже), тогда для функции напряжений имеем краевое условие (штрихи" опускаем):

$$\text{при } \rho = 1 + \lambda \psi(\zeta) \quad F(\rho, \zeta) = 0 \quad (23.16)$$

и условие статической эквивалентности:

$$F(0, \zeta) = -\frac{M}{2\pi}. \quad (23.17)$$



Фиг. 47.

Из ограниченности напряжений  $\tau_{r\varphi}$  и  $\tau_{\varphi z}$  при  $\rho = 0$  вытекает, что производные  $\frac{\partial F}{\partial \zeta}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial \rho}$  должны стремиться к нулю при  $\rho \rightarrow 0$  не медленней, чем  $\rho^2$ . В дальнейшем мы будем исходить из степенной зависимости

$$f(T^2) = B(\infty) T^{m-1}. \quad (23.18)$$

#### Кручение цилиндрического стержня.

Пусть  $\lambda = 0$ . Функция напряжений, которую мы будем отличать для этого случая нулевым индексом, зависит лишь от координаты  $\rho$ . Вследствие этого

$$\tau_{r\varphi} = 0; \quad \tau_{\varphi z} = \frac{1}{a^3} \frac{1}{\rho^2} \frac{dF_0}{d\rho}, \quad (23.19)$$

а решение уравнения (23.12) при степенной зависимости (23.18) имеет вид:

$$F_0 = C_1 \rho^{3+\mu} + C_2,$$

где  $C_1$ ,  $C_2$  — произвольные постоянные. Используя условия (23.16) и (23.17), находим:

$$F_0 = -\frac{a^2 \tau_{\max}}{3+\mu} (1 - \rho^{3+\mu}), \quad (23.20)$$

где, как и ранее (§ 20), положено:

$$\tau_{\max} = \frac{M(3+\mu)}{2\pi a^3}. \quad (23.21)$$



*Дифференциальное уравнение  $n$ -го приближения.* Обратимся к общему случаю, когда  $\lambda \neq 0$ ; решение ищем в виде ряда по степеням  $\lambda$ :

$$F(\rho, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\rho, \zeta) \lambda^n, \quad (23.22)$$

где  $F_n(\rho, \zeta)$  — новые неизвестные функции. Внося этот ряд в дифференциальное уравнение (23.12) и собирая после преобразований коэффициенты при одних и тех же степенях  $\lambda$ , получаем (мы не останавливаемся на несколько громоздком выводе, отсылая читателя к работе [6]):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\partial^2 F_n}{\partial \zeta^2} - \frac{1+2m}{\rho} \frac{\partial F_n}{\partial \rho} + m \frac{\partial^2 F_n}{\partial \rho^2} - \Phi_n \right) \lambda^n = 0, \quad (23.23)$$

где  $\Phi_n$  зависит от функций  $F_i$  с индексом, меньшим  $n$ ; заметим, что

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= 0, \\ \Phi_2 &= \frac{2+m}{\rho} Q - \frac{\partial}{\partial \rho} Q - (m-1) \left( \frac{\partial F_0}{\partial \rho} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial F_1}{\partial \rho} \frac{\partial F_1}{\partial \zeta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (23.24)$$

и т. д.; здесь введено обозначение

$$Q = \frac{m-1}{2} \left( \frac{\partial F_0}{\partial \rho} \right)^{-1} \left\{ \left[ 3 + \frac{1}{3}(m-3)(m-5) \right] \left( \frac{\partial F_1}{\partial \rho} \right)^2 + \left( \frac{\partial F_1}{\partial \zeta} \right)^2 \right\}.$$

В силу произвольности  $\lambda$  из (23.22) вытекает последовательность линейных уравнений:

$$\frac{\partial^2 F_n}{\partial \zeta^2} - \frac{1+2m}{\rho} \frac{\partial F_n}{\partial \rho} + m \frac{\partial^2 F_n}{\partial \rho^2} = \Phi_n(\rho, \zeta) \quad (23.25)$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots).$$

*Граничное условие.* На боковой поверхности стержня, т. е. при  $\rho = 1 + \lambda \psi(\zeta)$  имеем в силу (23.16), (23.22):

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(1 + \lambda \psi(\zeta), \zeta) \lambda^n = 0.$$

Разлагая  $F_n$  в ряд по степеням  $\lambda$  и собирая члены с одинаковыми степенями  $\lambda$ , приходим к граничному условию для

$F_n(\rho, \zeta)$ :

$$F_0(1) = 0;$$

$$F_n(1, \zeta) = - \sum_{k=1}^n \frac{[\psi(\zeta)]^k}{k!} \left[ \frac{\partial^k F_{n-k}}{\partial \rho^k} \right]_{\rho=1} \equiv S_n^*(\zeta) \quad (23.26)$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots),$$

где через  $S_n^*(\zeta)$  обозначена правая часть в (23.26), независимая от  $F_n$ .

*Условие статической эквивалентности.* Согласно (23.17) и (23.22), имеем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(0, \zeta) \lambda^n = - \frac{M}{2\pi},$$

следовательно,

$$\left. \begin{aligned} F_0(0, \zeta) &= - \frac{M}{2\pi}; \\ F_n(0, \zeta) &= 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (23.27)$$

V. Решение в полиномах относительно  $\zeta$ .  
Пусть

$$\psi(\zeta) = \sum_{k=1}^p b_k \left( \frac{\zeta}{l} \right)^k. \quad (23.28)$$

Первое приближение ищем в форме

$$F_1(\rho, \zeta) = \sum_{k=1}^p R_k(\rho) \left( \frac{\zeta}{l} \right)^k, \quad (23.29)$$

где  $R_k(\rho)$  — некоторые функции  $\rho$ . Внося (23.29) в дифференциальное уравнение (23.25) при  $n=1$  и приравнявая нулю коэффициенты при  $\left( \frac{\zeta}{l} \right)^k$ , получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$m \frac{d^2 R_k}{d\rho^2} - \frac{1+2m}{\rho} \frac{dR_k}{d\rho} + \frac{(k+1)(k+2)}{l^2} R_{k+2} = 0 \quad (23.30)$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots, p),$$

причем в этой записи следует полагать  $R_{p+1} = R_{p+2} = 0$ . Эта система просто интегрируется; прежде всего находим из двух последних уравнений системы

$$\begin{aligned} R_p &= A_p \rho^{3+\mu} + B_p; \\ R_{p-1} &= A_{p-1} \rho^{3+\mu} + B_{p-1}, \end{aligned}$$

где  $A_p, A_{p-1}; B_p, B_{p-1}$  — произвольные постоянные. Внося  $R_p, R_{p-1}$  в третье и четвертое (снизу) уравнения (23.30), находим  $R_{p-2}, R_{p-3}$  и т. д. Произвольные постоянные определяются из условия на границе

$$R_k(1) = -b_k \left( \frac{\partial F_0}{\partial \rho} \right)_{\rho=1} \quad (k = 1, 2, 3, \dots, p), \quad (23.31)$$

вытекающего из (23.26), и условия статической эквивалентности

$$R_k(0) = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots, p). \quad (23.32)$$

Первое приближение получено; дальнейшие приближения строятся подобным же образом, правда, в полиномах более высокой степени относительно  $\zeta$  (так,  $F_2$  — в полиномах степени  $2p, F_3$  — в полиномах степени  $3p$  и т. д.).

Рассмотрим в качестве примера кручение конического стержня; здесь

$$\psi(\zeta) = -\frac{\zeta}{l}.$$

По изложенному способу легко находим первое приближение

$$F_1(\rho, \zeta) = \frac{M(3+\mu)}{2\pi} \frac{\zeta}{l} \rho^{3+\mu}.$$

Нетрудно убедиться в том, что при  $\mu = 1$  решение  $F_0 + \lambda F_1$  с точностью до  $\lambda^2$  совпадает с известным точным решением задачи о кручении упругого конического стержня.

Несколько более сложные вычисления приводят ко второму приближению

$$F_2(\rho, \zeta) = \frac{M(3+\mu)(4+\mu)}{4\pi l^2} \left( \zeta^2 + \frac{1-\rho^2}{5+\mu} \right) \rho^{3+\mu}.$$

VI. Решение в рядах Фурье. Построенные выше решения элементарны и достаточно общи (ибо в интервале

—  $l$ ,  $+l$  непрерывную функцию  $\psi(\zeta)$  можно равномерно аппроксимировать полиномом), но не всегда удобны. Рассмотрим решение уравнения (23.25) в рядах Фурье. Пусть  $F_n^* = F_n^*(\rho, \zeta)$  — частный интеграл неоднородного уравнения (23.25), обращающийся в нуль при  $\rho = 0$  вместе с первыми производными (см. выше). Решение однородного уравнения  $F_{n0}(\rho, \zeta)$  должно удовлетворять граничному условию:

$$F_{n0}(1, \zeta) = S_n^*(\zeta) - F_n^*(1, \zeta) \equiv S_n(\zeta). \quad (23.33)$$

Правая часть (23.33) — известная функция; представим ее тригонометрическим рядом

$$S_n(\zeta) = a_{0n} + \sum_{p=1}^{\infty} \left( a_{pn} \cos \frac{p\pi\zeta}{l} + b_{pn} \sin \frac{p\pi\zeta}{l} \right),$$

где  $a_{0n}, a_{pn}, b_{pn}$  — коэффициенты Фурье. Разыскивая, далее, решения однородного уравнения вида  $R(\rho) \cos \frac{p\pi\zeta}{l}, R(\rho) \sin \frac{p\pi\zeta}{l}$ , удовлетворяющие упомянутым требованиям на оси стержня

$$F_{n0}(0, \zeta) = 0; \quad \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial F_{n0}}{\partial \rho} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial F_{n0}}{\partial \zeta} \rightarrow 0 \quad \text{при } \rho \rightarrow 0$$

и граничному условию (23.33), находим формальное решение (обозначено  $3 + \mu = 2\alpha$ ):

$$F_n(\rho, \zeta) = F_n^*(\rho, \zeta) + a_{0n} \rho^{2\alpha} + \\ + \rho^\alpha \sum_{p=1}^{\infty} \frac{I_\alpha \left( \frac{p\pi\rho}{l\sqrt{m}} \right)}{I_\alpha \left( \frac{p\pi}{l\sqrt{m}} \right)} \left( a_{pn} \cos \frac{p\pi\zeta}{l} + b_{pn} \sin \frac{p\pi\zeta}{l} \right), \quad (23.34)$$

где  $I_\alpha$  — бesselовы функции мнимого аргумента порядка  $\alpha$ . Полученный ряд, вообще говоря, обладает неудовлетворительной сходимостью, так как обычно  $S_n(l-0) \neq S_n(-l+0)$ . Однако, используя решения в полиномах  $\zeta$  (см. выше), можно в желательной мере улучшить сходимость. Для наших целей достаточно, чтобы ряд Фурье имел коэффициенты вида  $O(\rho^{-2})$ , поэтому не требуется устранить разрывы функции  $S_n(\zeta)$  и ее

производной. Введем обозначения

$$S_n(l-0) - S_n(-l+0) = \Delta; \quad \left. \frac{dS_n}{d\zeta} \right|_{l-0} - \left. \frac{dS_n}{d\zeta} \right|_{-l+0} = d$$

и рассмотрим решение однородного уравнения

$$\Omega_n(\rho, \zeta) = \frac{1}{2} \rho^{2n} \left[ \frac{ld}{2} \left( \frac{\zeta}{l} \right)^2 + \Delta \frac{\zeta}{l} - \frac{ld}{4m(m+1)} \left( \frac{\rho}{l} \right)^2 \right],$$

обладающее такими же разрывами. Тогда  $n$ -ое приближение  $F_n(\rho, \zeta)$  можно представить суммой

$$F_n(\rho, \zeta) = F_n^*(\rho, \zeta) + \Omega_n(\rho, \zeta) + a_{0n}^* \rho^{2n} + \\ + \rho^\alpha \sum_{p=1}^{\infty} \frac{I_\alpha \left( \frac{p\pi\rho}{l\sqrt{m}} \right)}{I_\alpha \left( \frac{p\pi}{l\sqrt{m}} \right)} \left( a_{pn}^* \cos \frac{p\pi\zeta}{l} + b_{pn}^* \sin \frac{p\pi\zeta}{l} \right),$$

где  $a_{0n}^*$ ,  $a_{pn}^*$ ,  $b_{pn}^*$  — коэффициенты Фурье функции  $S_n - \Omega_n$ , имеющие порядок  $O(\rho^{-8})$ .

Рассмотрим задачу о кручении волнистого стержня

$$\psi(\zeta) = \cos \frac{q\pi\zeta}{l},$$

где  $q$  — целое число; т. к.  $F_1^*(\rho, \zeta) = 0$ , то легко находим первое приближение

$$F_1(\rho, \zeta) = -\frac{M\alpha}{\pi a^3} \rho^\alpha \frac{I_\alpha \left( \frac{q\pi\rho}{l\sqrt{m}} \right)}{I_\alpha \left( \frac{q\pi}{l\sqrt{m}} \right)} \cos \frac{q\pi\zeta}{l}.$$

Пользуясь этим решением, нетрудно показать, что малая волнистость стержня в первом приближении не влияет на угол кручения.

VII. Решение в интегралах Фурье. Основываясь на принципе Сен-Венана, несколько изменим формулировку задачи. Продолжим стержень в обе стороны, сведя его концы непрерывным и достаточно плавным образом в бесконечный цилиндрический стержень радиуса  $a$ . Можно считать, что в уравнениях (23.25) правые части  $\Phi_n(\rho, \zeta)$  стремятся к нулю

при  $|\zeta| \rightarrow \infty$ . Пусть  $F_n^*(\rho, \zeta)$  — частное решение неоднородного уравнения (23.25), стремящееся к нулю вместе с первыми производными (см. выше) при  $\rho \rightarrow 0$ , а также при  $|\zeta| \rightarrow \infty$ . Решение однородного уравнения ищем в форме  $R(\rho) \cos s\zeta$ ,  $R(\rho) \sin s\zeta$ , где  $R(\rho)$  — неизвестная функция, а  $s$  — произвольный параметр. Нетрудно видеть, что частным решением однородного уравнения, обращающимся в нуль при  $\rho = 0$ , является функция

$$\rho^\alpha J_\alpha\left(\frac{s\rho}{\sqrt{m}}\right) (A \cos s\zeta + B \sin s\zeta),$$

где  $J_\alpha(\dots)$  — бesselова функция мнимого аргумента порядка  $\alpha$ ;  $A$ ,  $B$  можно считать произвольными функциями параметра  $s$ . Суммирование по  $s$  приводит к решению однородного уравнения в виде:

$$F_{n0}(\rho, \zeta) = \rho^\alpha \int_0^\infty J_\alpha\left(\frac{s\rho}{\sqrt{m}}\right) [A(s) \cos s\zeta + B(s) \sin s\zeta] ds, \quad (23.35)$$

причем предполагается, что  $A(s)$ ,  $B(s)$  достаточно быстро убывают при  $s \rightarrow \infty$ . Функция  $F_{n0}(\rho, \zeta)$  при  $\rho = 1$  должна принимать заданное значение  $S_n(\zeta) = S_n^*(\zeta) - F_n^*(1, \zeta)$ . Можно считать, что для построенного бесконечного стержня  $S_n(\zeta) \rightarrow 0$  при  $|\zeta| \rightarrow \infty$ ; пусть  $S_n(\zeta)$  возможно представить интегралом Фурье

$$S_n(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds \int_{-\infty}^\infty S_n(t) \cos s(\zeta - t) dt.$$

Сопоставляя эту формулу с предыдущей, находим:

$$F_{n0}(\rho, \zeta) = \frac{\rho^\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{J_\alpha\left(\frac{s\rho}{\sqrt{m}}\right)}{J_\alpha\left(\frac{s}{\sqrt{m}}\right)} \int_{-\infty}^\infty S_n(t) \cos s(\zeta - t) dt ds.$$

Особенной простотой отличается первое приближение; здесь  $\Phi_1 = 0$ , следовательно  $F_1^* = 0$  и  $S_1(\zeta) = -\frac{Ma}{\pi} \psi(\zeta)$ .

Таким образом:

$$F_1(\rho, \zeta) = -\frac{M\alpha}{\pi^2} \rho^a \int_0^\infty \frac{I_a\left(\frac{s\zeta}{\sqrt{m}}\right)}{I_a\left(\frac{s}{\sqrt{m}}\right)} \int_{-\infty}^\infty \psi(t) \cos s(\zeta - t) dt ds. \quad (23.36)$$

VIII. Кручение стержня с кольцевой выточкой. Пусть

$$\psi(\zeta) = -\exp(-k\zeta^2), \quad (23.37)$$

где  $k$  — положительное число; стержень имеет вид цилиндра с кольцевой выточкой, глубина которой равна  $\lambda$ ; с увеличением  $k$  выточка суживается.

В меридиональном сечении стержня радиус кривизны дна выточки (т. е. при  $\zeta = 0$ ):

$$\rho_k = \frac{1}{2\lambda k} \quad \text{или} \quad k = \frac{1}{2\lambda \rho_k}. \quad (23.38)$$

Внося (23.37) в решение (23.36) и пользуясь известной формулой

$$\int_{-\infty}^\infty \exp(-kt^2) \cos s(\zeta - t) dt = \sqrt{\frac{\pi}{k}} \cos s\zeta \cdot \exp\left(\frac{-s^2}{4k}\right),$$

получаем:

$$F_1(\rho, \zeta) = \frac{M\alpha}{\pi} \frac{\rho^a}{\sqrt{\pi k}} \int_0^\infty \frac{I_a\left(\frac{sp}{\sqrt{m}}\right)}{I_a\left(\frac{s}{\sqrt{m}}\right)} \exp\left(-\frac{s^2}{4k}\right) \cos s\zeta ds. \quad (23.39)$$

Определим напряжения  $\tau_{r\varphi}^1$ ,  $\tau_{z\varphi}^1$ , соответствующие решению  $\lambda F_1$ , при  $\zeta = 0$ .

Дифференцируя (23.39) и пользуясь известным соотношением теории бесселевых функций

$$xI_p'(x) = pI_p(x) + xI_{p+1}(x),$$

находим:

$$\tau_{rz}^1 = \left[ -\frac{\lambda}{a^3 \rho^2} \frac{\partial F_1}{\partial \zeta} \right]_{\zeta=0} = 0; \quad (23.40)$$

$$\begin{aligned} \tau_{rz}^1 &= \left[ \frac{\lambda}{a^3 \rho^2} \frac{\partial F_1}{\partial \rho} \right]_{\zeta=0} = \\ &= \lambda \frac{Ma}{\pi a^2} \frac{\rho^a}{\sqrt{\pi k}} \left\{ (2a-1) \int_0^\infty \frac{I_a\left(\frac{s\rho}{\sqrt{m}}\right)}{I_0\left(\frac{s}{\sqrt{m}}\right)} \exp\left(-\frac{s^2}{4k}\right) ds + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho}{\sqrt{m}} \int_0^\infty \frac{I_{a+1}\left(\frac{s\rho}{\sqrt{m}}\right)}{I_0\left(\frac{s}{\sqrt{m}}\right)} s \exp\left(-\frac{s^2}{4k}\right) ds \right\}. \end{aligned}$$

На дне выточки  $\rho = 1 - \lambda$ ; при этом нетрудно видеть, что с точностью до величины порядка  $\lambda$  по сравнению с единицей первый интеграл равен  $\sqrt{\pi k}$ . Во втором интеграле отношение бесселевых функций положительно и монотонно возрастает, приближаясь к единице; при  $\frac{s}{\sqrt{m}} > N$ , где  $N$  — достаточно большое число, это отношение можно принимать равным единице. Пусть  $\frac{1}{2} \lambda \rho_k N^2 \ll 1$ ; тогда можно показать, что второй интеграл равен  $2k = \frac{1}{\lambda \rho_k}$  с точностью до величин порядка  $\frac{1}{2} \lambda \rho_k N^2$  по сравнению с единицей.

Прибавляя теперь к (25.40) нулевое приближение (23.19) при  $\rho = 1 - \lambda$ , получаем:

$$\tau_{rz} = 0; \quad \tau_{\varphi z} = \tau_{\max} \left( 1 + 0,8 \sqrt{\frac{\lambda}{m \rho_k}} + 2\lambda \right).$$

Последним слагаемым в этой формуле можно обычно пренебрегать. Таким образом, мы получили формулу, найденную ранее в задаче кручения цилиндрического стержня с продольным пазом (§ 22).

IX. Заключение. Вопрос о сходимости рассмотренного процесса остается открытым (как и в предыдущем



параграфе). Сопоставление результатов с известными точными решениями теории упругости свидетельствует о близости приближенного решения, получаемого из частных сумм ряда (23.22), к точному решению при достаточно малом  $\lambda$ . Простота предельного условия (23.26), не содержащего производных функции  $\psi(\zeta)$ , позволяет получать удовлетворительные результаты уже в первом приближении; в этом смысле показательна задача о кручении стержня с малой кольцевой выточкой, так как здесь имеется лишь близость нулевого порядка в счерзаниях рассмотренного стержня и исходного гладкого цилиндра.

Заметим, наконец, что кручение круглого полого стержня, по форме не сильно отличающегося от полого цилиндра, рассматривается аналогично сплошному стержню (см. [5]).

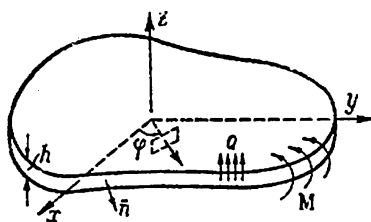
## ГЛАВА VII ИЗГИБ ПЛАСТИН

В этой главе рассматривается изгиб пластин в условиях установившейся ползучести; неустановившаяся ползучесть может быть изучена по общему методу (§ 9).

Решения, излагаемые ниже, основываются на энергетических уравнениях и позволяют сравнительно просто и с практически достаточной точностью находить прогибы пластины; напряжения определяются при этом с большей ошибкой.

### § 24. Основные положения

I. Деформация пластины. Мы примем, что основные допущения теории изгиба упругих пластин средней толщины справедливы и при пластическом изгибе, т. е.:



Фиг. 48.

1. Срединная плоскость пластины  $xu$  (фиг. 48) не растягивается.

2. Прямые, перпендикулярные до деформации к срединной плоскости, после деформации переходят в прямые, перпендикулярные к срединной поверхности.

Заметим, что в рассматриваемом нами случае малых прогибов приведенные допущения имеют, в сущности, геометрический характер и не связаны со свойствами материала. Это обстоятельство подчеркнул В. В. Новожилов [14].

Согласно принятым допущениям (штрихи " опускаем):

$$v_x = -z \frac{\partial w}{\partial x}; \quad v_y = -z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (24.01)$$

где  $v_x, v_y$  — проекции скорости точек пластины, а  $w = w(x, y)$  — скорость прогиба пластины. Исходя из (24.01), вычисляем компоненты скорости деформации

$$\begin{aligned} \xi_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \xi_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \eta_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \\ \eta_{xz} &= \eta_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (24.02)$$

При рассмотрении установившейся ползучести материал следует считать несжимаемым; следовательно:

$$\xi_z = -(\xi_x + \xi_y) = z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (24.03)$$

Интенсивность скорости деформации сдвига

$$\begin{aligned} H &= 2 |z| \left\{ \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \equiv \\ &\equiv 2 |z| \chi, \end{aligned} \quad (24.04)$$

где через  $\chi$  обозначена величина в фигурной скобке.

II. Усилия и моменты, действующие в сечениях пластины, определяются обычным образом. Воспользуемся формулами (6.02); т. к.  $3\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \approx \sigma_x + \sigma_y$ , то при степенной зависимости (6.09):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -8B^*(\infty) H^{k-1} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) z; \\ \sigma_y &= -8B^*(\infty) H^{k-1} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) z; \\ \tau_{xy} &= -4B^*(\infty) H^{k-1} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z. \end{aligned} \right\} \quad (24.05)$$

В сечениях  $x = \text{const}$  на единицу длины срединной линии действуют изгибающий момент  $G_x$ , крутящий момент  $K$ , касательные усилия  $N_x, S_{xy}$  и нормальное усилие  $T_x$ :

$$\begin{aligned} G_x &= \int \sigma_x z dz; \quad K = - \int \tau_{xy} z dz; \quad N_x = \int \tau_{xz} dz, \quad (24.06) \\ S_{xy} &= \int \tau_{xy} dz; \quad T_x = \int \sigma_x dz, \end{aligned}$$

где интегрирование производится по толщине пластины (от  $z = -h/2$  до  $z = +h/2$ ). В сечениях  $y = \text{const}$  действуют моменты  $G_y$ ,  $K$ , усилия  $N_y$ ,  $S_{xy}$ ,  $T_y$ . Так как напряжения (24.05) — нечетные функции  $z$ , то, очевидно,  $T_x = T_y = S_{xy} = S_{yx} = 0$ .

Усилия и моменты в некотором сечении, нормаль к которому образует с осями  $x$ ,  $y$  углы  $\varphi$  и  $\frac{\pi}{2} - \varphi$ , представляются известными формулами:

$$\left. \begin{aligned} G_n &= G_x \cos^2 \varphi + G_y \sin^2 \varphi - K \sin 2\varphi; \\ K_n &= \frac{1}{2} (G_x - G_y) \sin 2\varphi + K \cos 2\varphi; \\ N_n &= N_x \cos \varphi + N_y \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (24.07)$$

Внося напряжения (24.05) в (24.06) и интегрируя по  $z$ , получаем:

$$\left. \begin{aligned} G_x &= -D\chi^{\mu-1} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ G_y &= -D\chi^{\mu-1} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ K &= \frac{1}{2} D\chi^{\mu-1} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (24.08)$$

где

$$D = \frac{2B^*(\infty)}{2+\mu} h^{2+\mu} \quad (24.09)$$

есть жесткость пластины. С помощью (24.04) и (24.08) напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  можно представить в виде ( $z \geq 0$ ):

$$\sigma_x = D^* G_x z^\mu; \quad \sigma_y = D^* G_y z^\mu; \quad \tau_{xy} = -\frac{1}{2} D^* K z^\mu, \quad (24.10)$$

причем в область отрицательных  $z$  напряжения продолжают нечетным образом, а

$$D^* = \left( 1 + \frac{\mu}{2} \right) \left( \frac{2}{h} \right)^{2+\mu}.$$

III. Дифференциальное уравнение скорости прогиба пластины. Изгибающие и крутящие моменты связаны, как известно, дифференциальным соотно-

шением, вытекающим из условий равновесия выделенного элемента пластины:

$$\frac{\partial^2 G_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 K}{\partial x \partial y} + p = 0, \quad (24.11)$$

где  $p = p(x, y)$  — давление, распределенное по верхней поверхности пластины. Внося сюда  $G_x$ ,  $G_y$ ,  $K$  по формулам (24.08), получаем дифференциальное уравнение скорости прогиба пластины:

$$I(w) \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ D\kappa^{\mu-1} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ D\kappa^{\mu-1} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ D\kappa^{\mu-1} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] - p = 0. \quad (24.12)$$

Решение этого нелинейного дифференциального уравнения даже в простейших случаях наталкивается на большие математические трудности. Приближенное решение удобно строить, исходя из энергетических уравнений.

## § 25. Вариационное уравнение скорости прогиба пластины

1. Вариационное уравнение. Применим в задаче об установившейся ползучести изгибаемой пластины вариационное уравнение (6.14), характеризующее минимальные свойства истинных скоростей; это уравнение в случае пластины принимает вид:

$$\delta \int dz \int \int \frac{2B^*(\infty)}{\mu+1} H^{\mu+1} dx dy - \delta \mathcal{L} = 0,$$

где  $\delta \mathcal{L}$  — мощность внешних сил на вариациях скорости прогиба  $\delta w$ . Внося сюда значения  $H$  из (24.04) и выполняя интегрирование по  $z$ , получаем:<sup>1</sup>

$$\delta \left( \int \int \frac{D}{\mu+1} \kappa^{\mu+1} dx dy - \mathcal{L} \right) = 0. \quad (25.01)$$

<sup>1</sup> Соответствующие вариационное и дифференциальное уравнения для прогиба пластины в теории малых упруго-пластических деформаций указаны А. А. Ильиным [8].

На пластину действует поверхностная нагрузка  $p = p(x, y)$ ; вдоль края пластины приложены сила  $Q$  и изгибающий момент  $M$  (фиг. 48). Поэтому

$$\delta \mathcal{L} = \iint p(x, y) \delta w \, dx \, dy + \oint Q \delta w \, ds - \oint M \delta \frac{\partial w}{\partial n} \, ds, \quad (25.02)$$

где  $ds$  — элемент дуги контура пластины,  $\bar{n}$  — нормаль к контуру,  $\delta w$  — вариация скорости прогиба. Если в (25.01) выполнить варьирование и интегрированием по частям избавиться обычным образом от производных вариации  $\delta w$ , то после ряда преобразований, на которых мы не останавливаемся, получим уравнение:

$$\begin{aligned} \iint J(w) \delta w \, dx \, dy + \oint \left( N_n - \frac{\partial H_n}{\partial s} - Q \right) \delta w \, ds - \\ - \oint (G_n - M) \frac{\partial}{\partial n} \delta w \, ds = 0. \end{aligned} \quad (25.03)$$

Так как внутри области вариация  $\delta w$  произвольна, то отсюда вытекает уже известное нам дифференциальное уравнение скорости прогиба  $J(w) = 0$ .

Рассмотрим некоторые случаи закрепления края пластины.

1. *Края пластины зажаты*; тогда вдоль края

$$\delta w = 0; \quad \frac{\partial}{\partial n} \delta w = 0 \quad (25.04)$$

и оба контурных интеграла в (25.03) равны нулю.

2. *Края пластины оперты*; тогда вдоль края

$$\delta w = 0; \quad M = 0. \quad (25.05)$$

Первый контурный интеграл равен нулю; во втором же интеграле  $\delta \frac{\partial w}{\partial n}$  на контуре произвольно, следовательно, должно выполняться условие

$$G_n = 0. \quad (25.06)$$

3. *На края пластины действуют заданные силы и моменты*. В этом случае  $\delta w$  и  $\delta \frac{\partial w}{\partial n}$  произвольны на контуре

и из (25.03) вытекают предельные условия

$$N_n - \frac{\partial K_n}{\partial s} = M. \quad (25.07)$$

В частности, если края пластины свободны, то в (25.07) следует положить  $M=0$ ;  $Q=0$ .

Геометрические условия, налагаемые на скорость прогиба ( $w=0$ ,  $\frac{\partial w}{\partial n}=0$  для зажатого края;  $w=0$  для опертого края), называются жесткими граничными условиями. Условия равновесия на контуре ( $G_n=0$  для опертого края;  $N_n - \frac{\partial K_n}{\partial s} = Q$ ,  $G_n = M$  в случае 3), содержащиеся в самом вариационном уравнении, называются „естественными“ граничными условиями. При решении вариационного уравнения (25.01) прямыми методами жестким условиям необходимо удовлетворять заранее, естественным же граничным условиям, вообще говоря, можно не удовлетворять заранее, они будут удовлетворены в силу самого вариационного уравнения. Следует, однако, заметить, что при приближенном решении вариационного уравнения (25.01), когда ограничиваются несколькими слагаемыми по Ритцу, полезно для увеличения точности решения удовлетворить заранее и естественным граничным условиям. Это нетрудно сделать, т. к. нам известно, как выражаются усилия и моменты  $N_n$ ,  $K_n$ ,  $G_n$  через скорость прогиба  $w$ .

II. Приложение метода Ритца. Так как функционал в (25.01) неквадратичный, то использование метода Ритца в сколько-нибудь полной форме связано с большими трудностями, возникающими при решении системы нелинейных алгебраических уравнений<sup>1</sup> относительно параметров  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , ... Если, однако, ограничиться простейшей формой решения, содержащей лишь один параметр  $C_1$ , то последний легко находится. В самом деле, пусть мы подобрали подходящую функцию  $w_1(x, y)$ , удовлетворяющую поставленным нулевым граничным условиям; тогда  $Cw_1(x, y)$ , где  $C$  — произвольный параметр, также будет удовлетворять граничным

<sup>1</sup> Для отдельных задач теории ползучести решение может быть получено численным путем.

условиям. Согласно вариационному уравнению (25.01), необходимо найти минимум функции

$$A(L) C^{\mu+1} - A(\mathcal{L}) C = \min,$$

где  $A(L)$ ,  $A(\mathcal{L})$  — постоянные, вычисляемые в каждой задаче по  $w_1(x, y)$ , но тогда

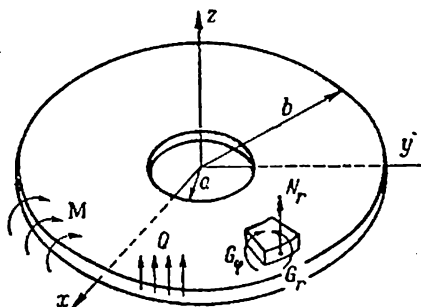
$$C = \left[ \frac{A(\mathcal{L})}{(\mu+1) A(L)} \right]^m.$$

Точность подобного решения вариационной задачи (25.01) определяется удачным выбором функции  $w_1(x, y)$ . Хороших результатов обычно можно достигнуть, если взять за  $w_1(x, y)$  поверхность прогиба в соответствующей задаче теории упругости. Целесообразно, как уже упоминалось выше, заранее удовлетворять статическим граничным условиям на контуре (естественным условиям).

Решение в форме  $Cw_1(x, y)$  приводит к практически хорошим результатам для скорости прогиба, напряжения определяются при этом с большей погрешностью.

## § 26. Осесимметричный изгиб круглой пластины

1. Общие уравнения. Рассмотрим в качестве примера осесимметричный изгиб пластины (фиг. 49);  $2a$ ,  $2b$  —



Фиг. 49.

соответственно внутренний и наружный диаметры пластины. Здесь

$$H^2 = 4 (\xi_r^2 + \xi_r \xi_\varphi + \xi_\varphi^2), \quad (26.01)$$



где  $\xi_r$ ,  $\xi_\varphi$  — скорости относительных удлинений в радиальном и тангенциальном направлениях; при этом

$$\left. \begin{aligned} \xi_r &= -z \frac{d^2 w}{dr^2}; \\ \xi_\varphi &= -\frac{z}{r} \frac{dw}{dr}; \\ \chi^2 &= \left( \frac{d^2 w}{dr^2} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \frac{d^2 w}{dr^2} + \left( \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (26.02)$$

Изгибающие моменты  $G_r$ ,  $G_\varphi$  связаны со скоростью прогиба  $w$  формулами:

$$\left. \begin{aligned} G_r &= -D\chi^{\mu-1} \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{2r} \frac{dw}{dr} \right); \\ G_\varphi &= -D\chi^{\mu-1} \left( \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \frac{1}{2} \frac{d^2 w}{dr^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (26.03)$$

и удовлетворяют дифференциальному уравнению равновесия

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{d}{dr} (r G_r) - G_\varphi \right] + p r = 0. \quad (26.04)$$

Срезающее усилие

$$N_r = \frac{1}{r} \left[ \frac{d}{dr} (r G_r) - G_\varphi \right]. \quad (26.05)$$

Вариационное уравнение (25.01) принимает вид:

$$\delta \int_a^b \frac{2\pi D}{\mu+1} \chi^{1+\mu} r dr - \delta \mathcal{L} = 0, \quad (26.06)$$

причем

$$\delta \mathcal{L} = 2\pi \int_a^b p(r) \delta w r dr + 2\pi [Qr \delta w]_a^b - 2\pi \left[ Mr \delta \frac{dw}{dr} \right]_a^b. \quad (26.07)$$

Рассмотрим, для простоты, сплошную пластину ( $a=0$ ), заделанную или опертую по краю  $r=b$ . Введем безразмерную координату

$$\rho = \frac{r}{b} \quad (0 \leq \rho \leq 1)$$

и обозначим интеграл в первом слагаемом уравнения (26.06) через  $\bar{L}$ ; нетрудно видеть, что при  $D = \text{const}$ :

$$\left. \begin{aligned} \bar{L} &= \frac{2\pi D}{\mu+1} \frac{1}{b^{2\mu}} \int_0^1 \left[ \left( \frac{d^2 w}{d\rho^2} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \frac{d^2 w}{d\rho^2} + \left( \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \right)^2 \right]^{\frac{\mu+1}{2}} \rho d\rho, \\ \mathcal{L} &= 2\pi b^2 \int_0^1 \rho (p) w(\rho) \rho d\rho. \end{aligned} \right\} \quad (26.08)$$

II. Частные случаи. Рассмотрим несколько простых задач.

1. *Опертая пластина под действием равномерного давления.* Здесь

$$\text{при } \rho = 1 \quad w = 0; \quad G_r = 0.$$

Второе („естественное“) условие может быть записано в виде:

$$\text{при } \rho = 1 \quad \frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{2\rho} \frac{dw}{d\rho} = 0.$$

Кроме того, очевидно:

$$\text{при } \rho = 0 \quad \frac{dw}{d\rho} = 0.$$

Этим условиям удовлетворяет полином

$$w = C_1 \left( 1 - \frac{14}{11} \rho^2 + \frac{3}{11} \rho^4 \right). \quad (26.09)$$

Внося это значение в (26.06) и вычисляя, находим:

$$C_1 = \frac{11b^2}{12\sqrt{13}} \left( \frac{5pb^2}{12\sqrt{13}DS_1} \right)^m,$$

где положено

$$S_1 = \int_0^1 \left( \rho^2 - \frac{28}{13} \rho + \frac{49}{39} \right)^{\frac{\mu+1}{2}} d\rho.$$

Значения  $S_1$  даны на фиг. 50. Скорость прогиба в центре пластины

$$w_0 = w|_{\rho=0} = C_1.$$

2. *Заделанная пластина под действием равномерного давления.* Здесь мы имеем жесткие граничные условия

$$\text{при } \rho = 1 \quad w = 0; \quad \frac{dw}{d\rho} = 0.$$

Разыскивая скорость прогиба в форме:

$$w = C_2 (1 - \rho^2)^2, \quad (26.10).$$

находим

$$C_2 = \frac{\sqrt{13}}{4} b^2 \left( \frac{\sqrt{13} P b^2}{12 D S_2} \right)^m,$$

где положено

$$S_2 = \int_0^1 \left( \rho^2 - \frac{12}{13} \rho + \frac{3}{13} \right)^{\frac{\mu+1}{2}} d\rho.$$

Кривая  $S_2 = S_2(\mu)$  показана на фиг. 50; наконец,  $w_0 = w|_{\rho=0} = C_2$ .

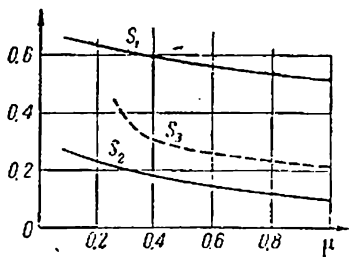
Мы рассмотрели случай распределенной нагрузки; если пластина изгибается сосредоточенной силой  $P$ , приложенной в центре пластины, то

$$\delta \mathcal{L} = P \delta w_0, \quad (26.11)$$

где  $\delta w_0$  — вариация скорости прогиба в центре пластины. Приводим результаты вычислений для рассмотренных выше задач в случае действия сосредоточенной нагрузки.

3. *Опертая пластина под действием сосредоточенной силы.* Скорость прогиба представляется формулой (26.09), но здесь

$$C_1 = \frac{11 \cdot b^2}{12 \sqrt{13}} \left( \frac{11}{12 \sqrt{13}} \frac{P}{\pi D S_1} \right)^m. \quad (26.12).$$



Фиг. 50.

4. *Заделанная пластина под действием сосредоточенной силы.* Скорость прогиба представляется формулой (26.10), но здесь

$$C_2 = \frac{\sqrt{13} \cdot b^2}{4} \left( \frac{\sqrt{13}}{4} \frac{P}{\pi D S_2} \right)^m. \quad (26.13)$$

В заключение заметим, что нетрудно рассмотреть другие нагрузки, а также ползучесть пластин с отверстием; на этом мы не останавливаемся.

### § 27. Минимальные свойства напряженного состояния пластины

Минимальные свойства напряженного состояния тела при установившейся ползучести характеризуются вариационным уравнением (§ 6):

$$\begin{aligned} \delta \int \int \int_V \frac{2B(\infty)}{m+1} T^{m+1} dV = \\ = \int \int_S (v_x \delta X_n + v_y \delta Y_n + v_z \delta Z_n) dS, \end{aligned} \quad (27.01)$$

причем сопоставляются статически возможные напряженные состояния. Этим уравнением нетрудно воспользоваться в теории изгиба пластин. Так как здесь работой напряжений  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  можно пренебрегать, то интенсивность касательных напряжений

$$T = + \frac{1}{\sqrt{3}} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2]^{1/2}.$$

Внося сюда напряжения согласно (24.10), получаем:

$$T = \frac{D^* |z|^{1/2}}{\sqrt{3}} [G_x^2 + G_y^2 - G_x G_y + 3K^2]^{1/2}. \quad (27.02)$$

Теперь после интегрирования по  $z$  уравнение (27.01) принимает вид:

$$\begin{aligned} \delta \int \int \Delta [G_x^2 + G_y^2 - G_x G_y + 3K^2]^{\frac{m+1}{2}} dx dy = \\ = \int \int \delta p \cdot w dx dy + \oint \delta Q w ds - \oint \delta M \frac{\partial w}{\partial n} ds, \end{aligned} \quad (27.03)$$

где введено обозначение

$$\Delta = \frac{B_1(\infty)}{m+1} \left(1 + \frac{\mu}{2}\right)^m \left(\frac{2}{h}\right)^{1+2m}$$

и мощность вариаций внешних сил на истинных скоростях прогиба  $w$  написана в развернутой форме. Подчеркнем, что сопоставляются статически возможные изгибающие и крутящий моменты, т. е. удовлетворяющие дифференциальному уравнению равновесия (24.11) и условиям равновесия на контуре пластины. Дифференциальное уравнение равновесия можно отождествить различными способами, например, положив ( $p = \text{const}$ ):

$$G_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - p \frac{x^2}{4}; \quad G_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - p \frac{y^2}{4}; \quad K = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad (27.04)$$

где  $\Phi = \Phi(x, y)$  — произвольная функция; подчинив ее заданным статическим условиям на контуре, мы получим статически возможное распределение напряжений; тем самым задача сводится к вариационному уравнению относительно одной неизвестной функции  $\Phi$ . Так как сколько-нибудь полное решение этого вариационного уравнения затруднительно, то можно говорить лишь о более или менее удачном использовании метода Ритца в простейшей его форме. Заметим, что применение этого приема к вариационному уравнению (27.03) несколько затруднено (в сравнении с вариационным уравнением скорости прогиба пластины, § 25), меньшей наглядностью функции  $\Phi(x, y)$  и тем, что часто встречающиеся краевые условия (заделка, шарнирная опора) являются в данной вариационной задаче естественными, а не жесткими; последнее обстоятельство затрудняет выбор подходящей функции  $\Phi$  в качестве приближения. Однако, в некоторых случаях использованием обоих вариационных принципов можно установить верхнюю и нижнюю границы для скорости прогиба. Такие оценки нетрудно получить в задаче изгиба пластины сосредоточенной нагрузкой (силой или моментом).

Ограничимся, для простоты, рассмотрением осесимметричного случая изгиба круглой пластины сосредоточенной силой.

II. Изгиб круглой пластины сосредоточенной силой. Вариационное уравнение (27.03) для изгиба

сплошной пластины силой  $P$ , приложенной в центре, в полярных координатах  $r, \varphi$  имеет вид (при  $h = \text{const}$ ):

$$\int_0^1 (G_r^2 + G_\varphi^2 - G_r G_\varphi)^{\frac{m+1}{2}} \rho d\rho = \min. \quad (27.05)$$

при условии, что внешние силы не варьируются; здесь положено  $\rho = r/b$ , где  $2b$  — диаметр пластины. При этом изгибающие моменты  $G_r, G_\varphi$  удовлетворяют дифференциальному уравнению равновесия (26.04) при  $\rho = 0$ , т. е.

$$\frac{d}{d\rho} \left[ \frac{d}{d\rho} (\rho G_r) - G_\varphi \right] = 0, \quad (27.06)$$

(всюду, кроме точки  $\rho = 0$ ) и условию равновесия на контуре  $\rho = 1$  (например, для опертой пластины  $G_r = 0$  при  $\rho = 1$ ). Сумма перерезывающих сил  $N_r$  [см. формулу (26.05)] для всякого цилиндрика, выделенного из пластины поверхностью  $\rho = \text{const}$ , должна равняться  $-P$ :

$$2\pi \rho b N_r = -P. \quad (27.07)$$

Из (27.06) следует

$$\frac{d}{d\rho} (\rho G_r) - G_\varphi = \text{const} = C'. \quad (27.08)$$

Но тогда в силу (26.05)  $N_r = C'/b\rho$ ; теперь из (27.07) получаем:

$$C' = -\frac{P}{2\pi}. \quad (27.09)$$

Вернемся к уравнению (27.08); перепишем его в виде:

$$G_r - G_\varphi + \rho \frac{dG_r}{d\rho} = -\frac{P}{2\pi}.$$

Полагая, что при  $\rho \rightarrow 0$  разность  $G_r - G_\varphi$  стремится к пределу  $c \frac{P}{2\pi}$ , где  $c$  — некоторое число, получаем:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left( \rho \frac{dG_r}{d\rho} \right) = -\frac{P}{2\pi} (1 + c). \quad (27.10)$$

Отсюда вытекает, что  $G_r$  имеет при  $\rho = 0$  логарифмическую особенность

$$G_r = -\frac{P}{2\pi} (1+c) (\ln \rho + a_0 + a_1 \rho + \dots), \quad (27.11)$$

где  $a_0, a_1, a_2, \dots$  — коэффициенты разложения. Теперь из уравнения равновесия находим

$$G_\varphi = -\frac{P}{2\pi} (1+c) \left( \ln \rho + \frac{c}{1+c} + a_0 + 2a_1 \rho + \dots \right) \quad (27.12)$$

Коэффициенты  $c; a_0, a_1, \dots$  произвольны; их необходимо подчинить заданному статическому условию на контуре пластины. Тогда моменты  $G_r, G_\varphi$  будут статически возможными, и упомянутые коэффициенты определятся из условия минимума дополнительной мощности пластины (27.05). Найдя коэффициенты  $c; a_0, a_1, \dots$ , вычисляем скорость прогиба  $w_0$  под силой по общей теореме (§ 6):

$$w_0 = \frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial P} = 2\pi b^2 \Delta \frac{\partial}{\partial P} \int_0^1 (G_r^2 + G_\varphi^2 - G_r G_\varphi)^{\frac{m+1}{2}} \rho d\rho. \quad (27.13)$$

Остановимся на примере опертой пластины; из условия  $G_r = 0$  при  $\rho = 1$  получаем:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots = 0.$$

В качестве простейшего приближения примем, что все коэффициенты

$$a_0 = a_1 = a_2 = \dots = 0,$$

тогда

$$G_r = -\frac{P}{2\pi} (1+c) \ln \rho; \quad G_\varphi = -\frac{P}{2\pi} (1+c) \ln \rho - \frac{P}{2\pi} c. \quad (27.14)$$

Параметр  $c$  определится из условия минимума (27.05); если  $m = 1$ , то нетрудно видеть, что  $c = -1/4$ ; при этом (27.14) есть точное решение задачи об изгибе упругой пластины (при  $\nu = \frac{1}{2}$ ). Сохраним, для простоты, это значение  $c$  и при

другом  $m$ ; тогда по формуле (27.13) находим:

$$w_0 = (m+1) \Delta b^2 S_3 \left( \frac{P}{2\pi} \right)^m, \quad (27.15)$$

где положено (см. фиг. 50):

$$S_3 = \left( \frac{1}{4} \right)^{m+1} \int_0^1 (9 \ln^2 \rho - 3 \ln \rho + 1)^{\frac{m+1}{2}} \rho d\rho.$$

## § 28. Неравенство для скорости прогиба под сосредоточенной нагрузкой

1. Вывод неравенства. Для установившейся скорости прогиба под сосредоточенной нагрузкой можно указать двустороннюю оценку аналогично тому, как это сделано в теории упругости Вебером [46].

Пусть на некоторое тело действует сосредоточенная нагрузка  $P$ . Согласно принципу минимума мощности системы (§ 6):

$$\bar{L}^* \equiv \bar{L} - Pw_0 = \min, \quad (28.01)$$

где  $w_0$  — скорость в направлении действия силы в точке приложения последней. Но в силу (8.05)  $\mathcal{L} = Pw_0 = (m+1)\bar{L}$ ; следовательно:

$$\bar{L}^* = -\frac{1}{m+1} Pw_0 = \min.$$

Если  $w_0$  — истинная скорость, то  $\bar{L}^* = \bar{L}_{\min} = -\frac{Pw_0}{m+1}$ . Для всякого приближенного решения

$$\tilde{L}^* = -\frac{P\tilde{w}_0}{m+1} \geq \bar{L}_{\min}.$$

где  $\tilde{w}_0$  — приближенное значение скорости под силой; таким образом,  $\tilde{w}_0 \leq w_0$ . Заметим, что при приближенном решении мы получаем:

$$\tilde{w}_0 = \tilde{\alpha} P^m,$$



где  $\tilde{\alpha} > 0$  — некоторый коэффициент; следовательно:

$$\tilde{\alpha} \leq \frac{w_0}{P^m}. \quad (28.02)$$

Рассмотрим теперь минимальные свойства напряженного состояния. Здесь (см. § 6):

$$\bar{\Lambda}^* = \bar{\Lambda} - P w_0 = \min,$$

где  $w_0$  — истинная скорость; т. к.  $\bar{\Lambda} = P w_0 - \bar{L}$ , то

$$\bar{\Lambda}^* = -\frac{m}{m+1} P w_0 = \min.$$

Если  $P$  — истинная нагрузка, соответствующая скорости  $w_0$ , то  $\bar{\Lambda}^* = \bar{\Lambda}_{\min}^* = -\frac{m}{m+1} P w_0$ . Для всякого приближенного решения

$$\tilde{\Lambda}^* = -\frac{\tilde{P} w_0}{m+1} \geq \bar{\Lambda}_{\min}^*,$$

где  $\tilde{P}$  — приближенное значение нагрузки, отвечающей скорости  $w_0$ . Но тогда  $\tilde{P} \leq P$ ; т. к. при этом решение задачи имеет вид:

$$\tilde{P} = \tilde{\beta} w_0^{\frac{1}{m}}, \quad (28.03)$$

где  $\tilde{\beta} > 0$  — некоторый коэффициент, то

$$\frac{w_0}{P^m} \leq \frac{1}{\tilde{\beta}^m}.$$

Итак, мы получили двустороннюю оценку

$$\tilde{\alpha} \leq \frac{w_0}{P^m} \leq \frac{1}{\tilde{\beta}^m}. \quad (28.04)$$

II. Пример — изгиб опертой круглой пластины. Неравенство (28.04) относится к телам любой формы. Рассмотрим в качестве примера задачу об изгибе опертой круглой

пластины силой  $P$ , приложенной в центре. Согласно приближенным решениям, найденным в § 26 и 27, имеем:

$$\tilde{\alpha} = \frac{11b^2}{12\sqrt{13}} \left( \frac{11}{12\sqrt{13}\pi S_1 D} \right)^m; \quad \frac{1}{\tilde{\beta}^m} = \frac{m+1}{(2\pi)^m} b^2 \Delta S_3.$$

Внося эти значения в неравенство (28.04) и преобразовывая, получаем:

$$\frac{(0,44)^{m+1}}{2S_3 S_1^m} < \frac{w_0}{(m+1) \Delta b^2 S_3 \left( \frac{P}{2m} \right)^m} < 1. \quad (28.05)$$

Эту оценку можно, конечно, улучшить более удачным выбором приближений.

---

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Беляев Н. М. Применение теории пластических деформаций к расчетам на ползучесть деталей при высоких температурах. Изв. АН СССР, отд. техн. наук, № 7, 1943.
2. Данюшевский А. Э. и Качанов Л. М. Ползучесть труб. Советское котлотурбостроение, № 10, 1940.
3. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат, 1948.
4. Качанов Л. М. Ползучесть при сложном напряженном состоянии. Котлотурбостроение, № 4, 1947.
5. Качанов Л. М. Пластическое кручение круглых стержней переменного диаметра. Прикл. матем. и механика, т. XII, в. 4, 1948.
6. Качанов Л. М. К теории неустановившейся ползучести. Прикл. матем. и механ., т. XIII, в. 4, 1949.
7. Качанов Л. М. Механика пластических сред. Гостехиздат, 1948.
8. Качанов Л. М. и Кац Ш. Н. О теориях ползучести. Котлотурбостроение, 1950. (Печатается).
9. Качанов Л. М. Пластический изгиб кривых тонкостенных труб. Котлотурбостроение, № 6, 1949.
10. Лейбензон Л. С. Элементы математической теории пластичности. Гостехиздат, 1943.
11. Малинин Н. Н. Основы расчетов на ползучесть. Машгиз, 1948 г.
12. Михайлов-Михеев П. Б. Металл в современном котлотурбостроении. ОНТИ, 1937.
13. Нейбер Г. Концентрация напряжений, Гостехиздат, 1947 г.
14. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. Гостехиздат, 1948.
15. Одинг И. А. Интерпретация характеристик ползучести металлов. Советское котлотурбостроение, № 5, 1946.
16. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием. Прикл. матем. и механ., т. XII, в. 1, 1948.
17. Работнов Ю. Н. Некоторые вопросы теории ползучести. Вестн. Моск. Госуд. Унив., № 10, 1948.
18. Работнов Ю. Н. Расчет деталей машин на ползучесть. Изв. АН СССР, отд. техн. наук, № 6, 1948.
19. Работнов Ю. Н. О диске равного сопротивления. Прикл. матем. и механ., т. XII, в. 4, 1948.
20. Рыжик И. М. Таблицы интегралов. 1948. ОГИЗ.
21. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. III, ГТТИ, 1934.
22. Соколовский В. В. Теория пластичности. Изд. Ак. Наук СССР, 1946.

23. Соколовский В. В. Пластическое напряженное состояние вращающихся дисков. Прикл. матем. и механ., т. XII, в. 1, 1948.
  24. Тимошенко С. П. Теория упругости. ОНТИ, 1937.
  25. Филиппов А. П. Напряжения во вращающихся дисках турбомашин при учете ползучести. АН УССР, Сборник грудов лабор. проблем быстроход. машин, вып. 1, 1949.
  26. Чуриков Ф. С. К вопросу о напряжениях и деформациях при высокой температуре. Вестн. Моск. Госуд. Унив., № 2, 1949.
  27. Bailey, R. W. The Utilization of Creep Test Data in Engineering Design. Proc. Inst. Mech. Eng., v. 131, стр. 131, 1935.
  28. Creep Data. Published by ASTM a. ASME. 1938.
  29. Davenport. Correlation of Creep and Relaxation Properties of Copper. Journ. of Appl. Mech., v. 5, No 2, 1938.
  30. Davis E. Creep and Relaxation of Oxygen-Free Copper. Journ. of Appl. Mech., v. 10, No 2, 1943.
  31. Everett a. Miklowitz. Poisson's Ratio at High Temperatures. Journ. of Appl. Phys., v. 15, No 8, 1944.
  32. Jeffreys. On Plasticity and Creep in Solids. Proc. Roy Soc. London, A-138, стр. 283, 1932.
  33. Karman Th. Ueber die Formänderung dünnwandiger Rohre, insbesondere federnder Ausgleichrohre. Zst VDI, стр 1889. 1911.
  34. Marin. Mechanical Properties of Materials and Design. N-Y. — London, 1942.
  35. Nadai A. The Creep of Metals under Various Stress Conditions. Th. v. Karmán Anniversary Volume, 1941.
  36. Norton F. Creep in Tubular Pressure Vessels. Trans. of the A. S. M. E, April, 1939.
  37. Odqvist. Creep Stresses in a Rotating Disc. Proc. Fourth Int. Congr. Appl. Mech., 1934.
  38. Popov E. P. Stresses in Turbine Disks at High Temperatures. Journ. Franklin Inst., May, 1947.
  39. Popov E. P. Correlation of Tension Creep Tests with Relaxation Tests. Journ. of Appl. Mech., v. 14, No 2, 1947.
  40. Robinson E. 100.000 Hour Creep Test. Mechan. Eng-g, March. 1943.
  41. Soderberg R. The Interpretation of Creep Tests for Machine Design. Trans. of ASME, v. 58, No 8, 1936.
  42. Sulzer Technical Review. No 4, 1948. Creep Tests and their Application to Gas-Turbine Design.
  43. Trifan D. On the Plastic Bending of Circular Plates Under Uniform Transverse Loads. Quarterly of Appl. Mathem. v. VI, No 4. 1949.
  44. Trumpler. Relaxation of Metals at High Temperatures. Journ. Appl. Phys., v. 12, N 3, 1941.
  45. Weber C. Veranschaulichung und Anwendung der Minimalsätze der Elastizitätstheorie. Zst. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 18, II. 6, 1938.
-

### Опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть	По чьей вине
33	5 снизу	(с точностью до несущественной аддитивной постоянной)	Вычеркнуть	Авт.
82	6 сверху			
108	14 снизу			
151	3 сверху	$N_n - \frac{\partial K_n}{\partial s} = -2G\theta = M$	$N_n - \frac{\partial K_n}{\partial s} = +2G\theta = Q; G_n = M$	Тип.